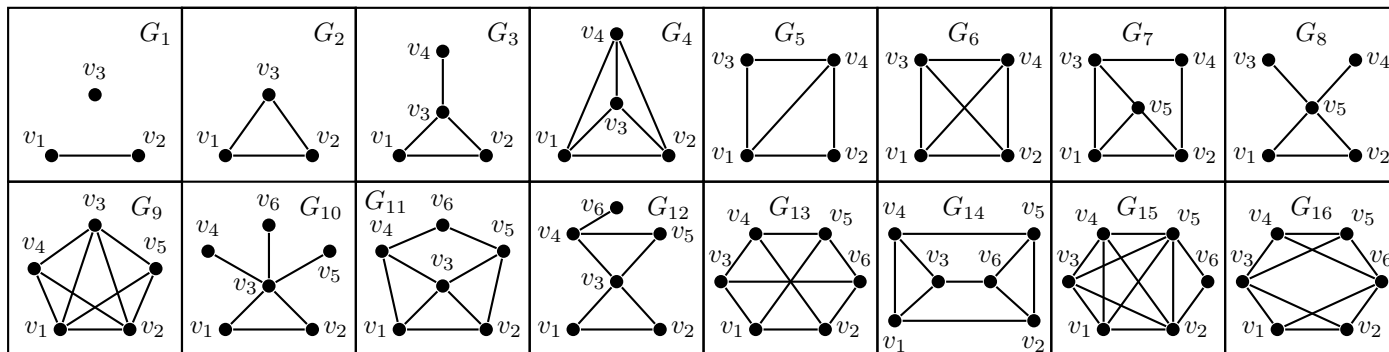


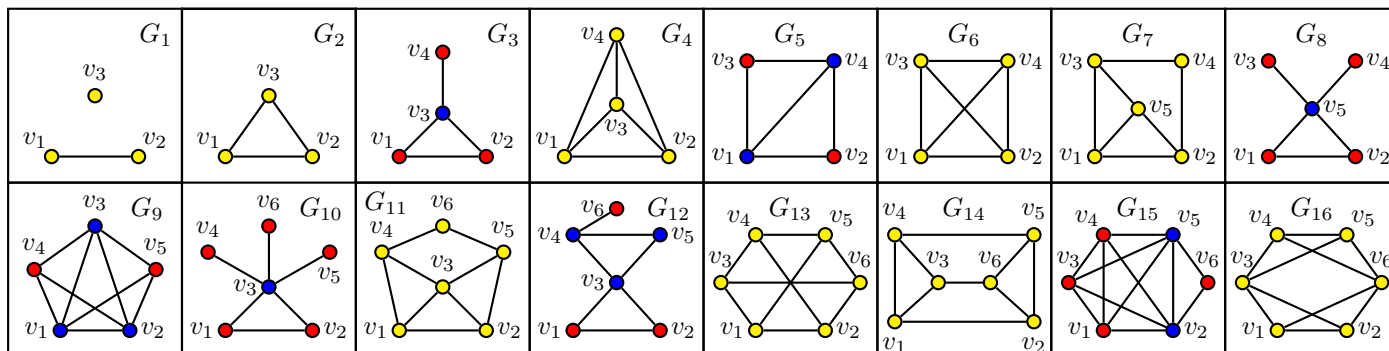
1. (–) Para cada grafo (*graph*)  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) \stackrel{\text{def}}{=} |V(G)|$  (cantidad de vértices, *vertices*) y tamaño  $m(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E(G)|$  (cantidad de aristas, *edges*), verificar que la suma de los grados de sus vértices duplica su tamaño (y entonces es par la cantidad de vértices de grado impar), escribir la sucesión de grados (*degree-sequence*)  $d(G)$ , determinar su grado mínimo  $\delta(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min_v d(v)$ , su grado máximo  $\Delta(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_v d(v)$ , la excentricidad (*eccentricity*)  $e(v) \stackrel{\text{def}}{=} \max_u d(v, u)$  de cada vértice  $v$ , el diámetro  $\phi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_u \max_v d(u, v)$ , el radio  $r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min_u \max_v d(u, v)$ , el centro  $C(G)$  (*center*: conjunto de vértices de excentricidad mínima), la periferia  $P(G)$  (*periphery*: conjunto de vértices de excentricidad máxima) Verificar en cada grafo que  $r(G) \leq \phi(G) \leq 2r(G)$  y *probarlo* en general. ¿Hay grafos isomorfos? ¿Hay grafos regulares? ¿Completos?



♣ (Resp. Parcial). La desigualdad  $r(G) \leq \phi(G)$  se cumple por la misma definición de radio y diámetro; ahora, sean  $x, y$  dos vértices de  $G$  separados por un diámetro (esto es,  $d(x, y) = \phi(G)$ ) y sea  $z$  un vértice central (es decir de excentricidad mínima); como  $d$  es una distancia en  $V(G)$  se tiene  $\phi(G) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq e(z) + e(z) = 2r(G)$ , con la primera igualdad por definición de diámetro, la primera desigualdad es la desigualdad triangular, la segunda desigualdad por definición de excentricidad, y la última igualdad por definición de radio; esto completa la prueba de  $r(G) \leq \phi(G) \leq 2r(G)$ . En  $G_1, d(G_1) = (0, 1, 1), \forall v \in V(G_1) : e(v) = \infty$ ; en  $G_{12}, d(G_{12}) = (1, 2, 2, 2, 3, 4)$ ; en  $G_{15}, d(G_{15}) = (2, 4, 4, 4, 5, 5)$ . La siguiente tabla muestra algunas de las características invariantes ante isomorfismos.

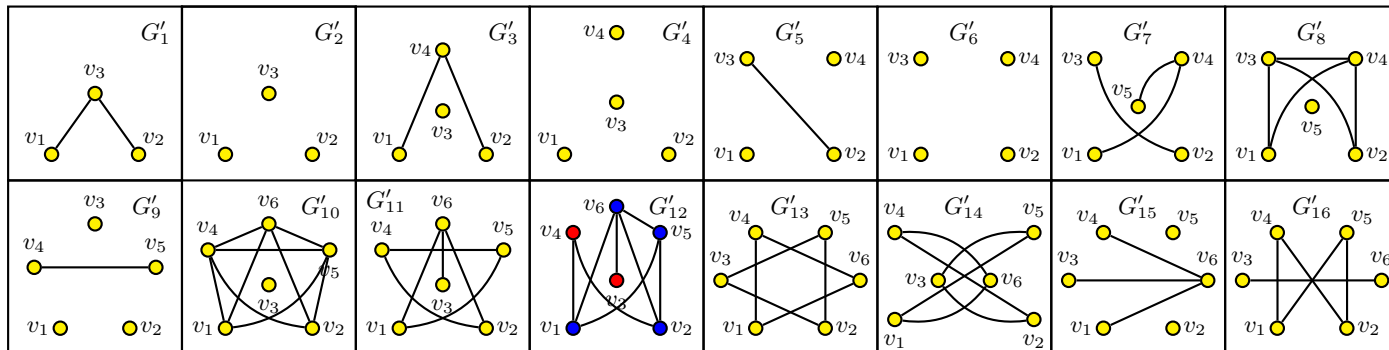
Grafo	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$	$G_{10}$	$G_{11}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{14}$	$G_{15}$	$G_{16}$
$n(G) =  V(G) $	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
$m(G) =  E(G) $	1	3	4	6	5	6	7	5	9	6	9	7	9	9	12	10
$\delta(G) = \min_v d(v)$	0	2	1	3	2	3	2	1	3	1	2	1	3	3	2	3
$\Delta(G) = \max_v d(v)$	1	2	3	3	3	3	3	4	4	5	4	4	3	3	5	4
$r(G) = \min_u \max_v d(u, v)$	$\infty$	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2
$\phi(G) = \max_u \max_v d(u, v)$	$\infty$	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2

Los grafos  $G_4$  y  $G_6$  son isomorfos ¡son iguales!, y no hay otros isomorfos (¿por qué no lo son  $G_{13}$  y  $G_{14}$ ?). Hay cinco grafos regulares: uno 2-regular ( $G_2$ ) y cuatro 3-regular ( $G_4, G_6, G_{13}, G_{14}$ ). Son completos  $G_2, G_4 = G_6$ . En la siguiente figura, son amarillos los vértices  $v$  que están en la intersección del centro y periferia (esto es,  $v \in C(G) \cap P(G)$ ), azules los que solo son centrales ( $v \in C(G) - P(G)$ ), rojos los que solo son periféricos ( $v \in P(G) - C(G)$ ).



2. Graficar, para cada uno de los 16 grafos del ejercicio anterior, su grafo complementario  $G'$ , mostrar que tanto  $G$  como  $G'$  pueden ser conexos, *probar* que es imposible que ambos sean no conexos. Determinar  $d(G')$  (ordenada no creciente) para cada grafo y comprobar que  $d(G) + d(G') = d(K_n)$  y *probar* que esto sucede en general. *Probar* que la complementación preserva los isomorfismos y la regularidad. ¿Preserva centros o periferias?

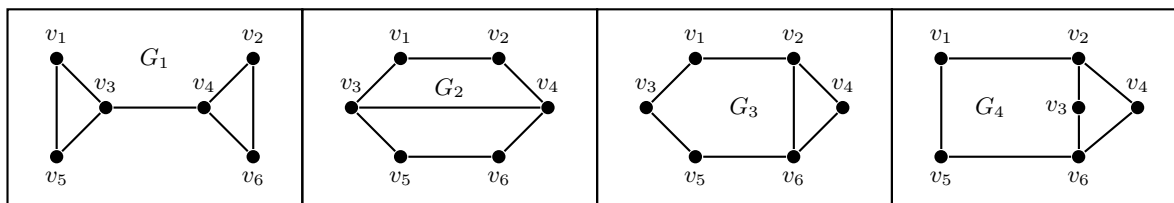
♣ (Resp. Parcial). Tanto  $G_{12}$  como  $G'_{12}$  son conexos; por otra parte, para  $G_{12}$  resultó (ordenado no decreciente)  $d(G_{12}) = (1, 2, 2, 2, 3, 4)$ , mientras que para  $G'_{12}$  es  $d(G'_{12}) = (4, 3, 3, 3, 2, 1)$ , siendo así  $d(G_{12}) + d(G'_{12}) = (5, 5, 5, 5, 5, 5) = d(K_6)$ . Lo mismo se ve en, por ejemplo,  $G_{13}$ , para el que  $d(G_{13}) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ , con  $d(G'_{13}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ . En las figuras se muestran los complementarios. Se advierte que el isomorfismo original entre  $G_4, G_6$  se preserva en sus complementarios  $G'_4, G'_6$ . También se observa que el grafo 2-regular  $G_2$  tiene un complemento  $G'_2$  que es 0-regular, que los grafos 4-regular  $G_4, G_6$  tienen complementos 0-regular  $G'_4, G'_6$  y que los grafos 3-regular  $G_{13}, G_{14}$  tienen complementos 2-regular  $G'_{13}, G'_{14}$  (en general, si un grafo de orden  $n$  es  $k$ -regular, su complemento es  $n - k - 1$  regular: *probarlo*). Que no preserva centros ni periferias es evidente de los colores (se mantiene la convención del ejercicio anterior).



La imposibilidad de que tanto  $G$  como  $G'$  sean no conexos: suponiendo  $G$  no conexo, se debe probar que hay un camino entre cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G'$ . Si en  $G$  los vértices  $u$  y  $v$  se hallan en distintas componentes conexas, entonces no hay una arista  $uv$  en  $G$ , de modo que en  $G'$  (por definición de  $G'$ ) se tiene el camino  $uv$ . Si, por el contrario,  $u$  y  $v$  se encuentran en la misma componente conexa de  $G$ , existe un vértice  $w$  en otra componente (pues  $G$  es no conexo), y por lo tanto no pertenecen a  $G$  las aristas  $uw$  ni  $vw$ . Pero entonces, (otra vez, por definición de  $G'$ ) esas aristas están en  $G'$ , luego existe el camino  $uwv$  que conecta  $u$  con  $v$  en  $G'$ . Esto completa la prueba.

3. Si  $A$  es la matriz de adyacencia del grafo sin lazos  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)|$ , probar que el elemento  $(i, j)$  de  $A^q$  indica el número de caminos de longitud  $q$  que conectan el vértice  $v_i$  con el vértice  $v_j$  y que  $d(v_i) = \sum_{k=1}^n A(i, k) = \sum_{k=1}^n A(k, i)$ ,  $m(G) = |E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A(i, k)$ . Graficar *todos* (salvo isomorfismo) los grafos simples con sucesión  $d(G) = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$ , determinar su radio, diámetro, centro y periferia, escribir su matriz de adyacencia  $A$  e incidencia  $M$ , ilustrar el resultado anterior para  $q = 4$ . ¿Qué representa  $MM^T(i, j)$ ?

♣ (Resp. Parcial). De  $d$  resulta que  $n = 6, m = 7$  y resultan posibles los cuatro grafos de las figuras, se dan las correspondientes matrices de adyacencia de tres de ellos. Si se considera la matriz del primer grafo, el elemento  $A_1^4(3, 4) = 4$  indica que son cuatro los caminos de longitud 4 entre los vértices  $v_3, v_4$ :  $v_3 v_1 v_5 v_3 v_4$ ,  $v_3 v_5 v_1 v_3 v_4$ ,  $v_3 v_4 v_2 v_6 v_4$ ,  $v_3 v_4 v_6 v_2 v_4$ . ¿Cuáles son los 7 caminos de longitud 4 entre  $v_1$  y  $v_1$ ? El grafo  $G_1$  tiene radio 2, diámetro 3, el centro es  $\{v_3, v_4\}$ , su perímetro es 3.



$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_1)^4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

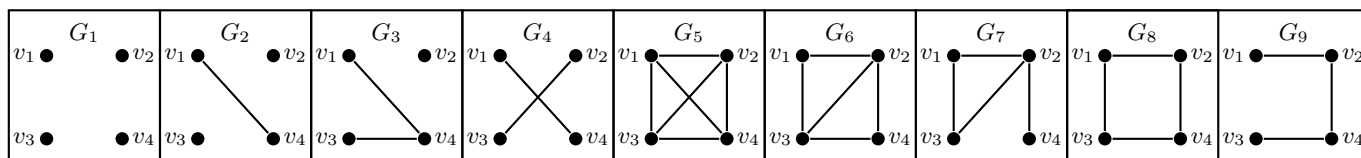
Sea  $p(q)$  a la proposición:  $A^q(i, j)$  indica la cantidad de caminos de longitud  $q$  que comunican los nodos  $v_i, v_j$ . Se tiene que  $p(1)$  se cumple, pues  $A^1(i, j) = A(i, j)$  es, por definición de matriz de adyacencia, la cantidad de aristas (y entonces caminos de longitud 1) entre  $v_i$  y  $v_j$ . Ahora se quiere probar que  $p(q) \Rightarrow p(q + 1)$ , esto es que el número de caminos de longitud  $q + 1$  entre  $v_i$  y  $v_j$  es  $A^{q+1}(i, j)$ , supuesto que haya  $A^q(i, j)$  caminos de longitud  $q$  entre esos nodos. Pero como  $A^{q+1} = A^q A$ , es  $A^{q+1}(i, j) = \sum_{k=1}^n A^q(i, k) A(k, j)$ ; para cualquier  $k$  fijo, el producto  $A^q(i, k) A(k, j)$  es no nulo siii  $A^q(i, k)$  y  $A(k, j)$  son no nulos, pero esto indica que hay  $A^q(i, k)$  caminos de longitud  $q$  entre el nodo  $v_i$  y el nodo  $v_k$  y hay  $A(k, j)$  aristas entre el nodo  $v_k$  y el nodo  $v_j$ : de esta manera hay  $A^q(i, k) A(k, j)$  caminos de longitud  $q + 1$  entre los nodos  $v_i, v_j$  que pasan por  $v_k$  (pues a cada uno de los caminos de  $v_i$  a  $v_k$  se le puede añadir una de esas aristas para llegar a  $v_j$ ). Ahora, variando  $k$  de 1 a  $n$  se recorren y suman todos los caminos de longitud  $q + 1$ , contabilizando así en  $A^{q+1}(i, j)$  la totalidad de esos caminos. El grado de  $v_i$  es  $MM^T(i, i) = A^2(i, i)$ ; si  $i \neq j$  la cantidad de aristas que conectan  $v_i$  con  $v_j$  es  $MM^T(i, j)$  (probarlo).

4. (–) Dado el grafo  $G = (V(G), E(G))$ , sean  $v \in V(G), e \in E(G)$ . Describir las matrices de adyacencia e incidencia de los grafos  $G - v$  y  $G - e$ , en términos de las matrices de adyacencia e incidencia de  $G$ .

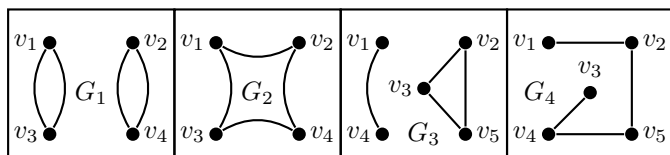
♣ (Resp. Parcial). Si se considera la numeración de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , la eliminación de la arista  $v_i v_j$  elimina la correspondiente columna de la matriz de incidencia, mientras que disminuye en uno el valor original de la matriz de adyacencia en las posiciones simétricas  $(i, j)$  y  $(j, i)$ . La eliminación del vértice  $v_i$  elimina la fila  $i$  de la matriz de incidencia a la vez que las columnas de cada arista incidente en  $v_i$ . En la matriz de adyacencia elimina la fila  $i$  y la columna  $i$  sin afectar al resto de la matriz de adyacencia original.

5. En el conjunto  $U_n$  de grafos de orden  $n$  se define  $\cong$  tal que  $G \cong H$  sii  $G$  es isomorfo a  $H$ . Probar que  $\cong$  es una relación de equivalencia, determinar la cantidad de grafos *simples* de orden  $n$  y probar que los 64 grafos simples de orden  $n = 4$  se agrupan en solo 11 clases de equivalencia, dando un representante de cada clase. Entre ellas, distinguir las clases regulares, las conexas y las autocomplementarias.

♣ (Resp. Parcial). Probar que  $\cong$  es reflexiva, simétrica y transitiva. Para un dado  $n = |V(G)|$  el número de aristas  $m = |E(G)|$  es a lo sumo  $\binom{n}{2}$  (¿por qué?) y como cada par de vértices de  $V(G)$  pueden o no ser adyacentes, se tiene un total de  $2^{\binom{n}{2}}$  grafos, que para  $n = 4$  resulta en  $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$  grafos. La figura muestra 9 de las 11 clases de equivalencia a través de sendos representantes, siendo  $(G_{k+4} = G'_k, k = 1, 2, 3, 4)$ . Son regulares  $G_1, G_4, G_5, G_8$ , hay 7 conexas (se ven  $G_5, G_6, G_7, G_8, G_9$ , resta una), una autocomplementaria ( $G_9$ ).

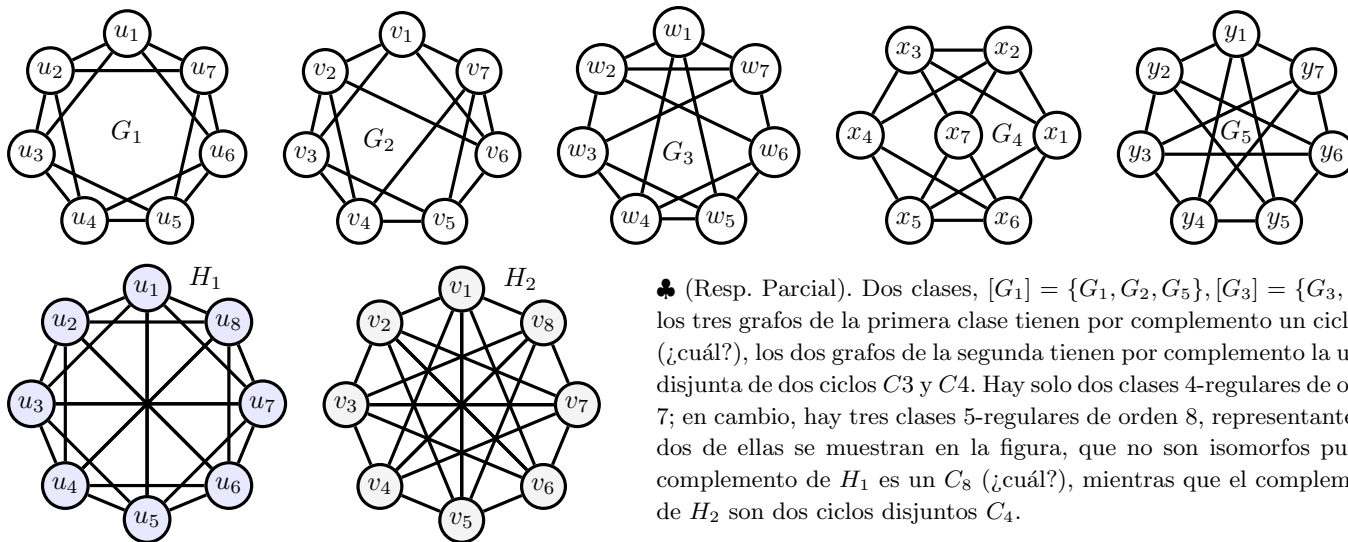


6. (–) Probar que dos grafos isomorfos deben tener la misma sucesión gráfica  $d$ , pero que la recíproca es falsa y determinar el *mínimo* orden  $n(G) = |V(G)|$  para que exista un par de grafos no isomorfos con la misma  $d$  en los tres siguientes casos: (a) grafos cualesquiera; (b) grafos sin lazos (pero permitiendo aristas múltiples); (c) grafos simples. Dar en cada caso el par de grafos no isomorfos de la misma  $d$ .



♣ (Resp. Parcial). Los mínimos órdenes son 2 para (a), 4 para (b) y 5 para (c); la figura muestra los pares no isomorfos  $G_1, G_2$  con  $d = (2, 2, 2, 2)$  y  $G_3, G_4$  con  $d = (1, 1, 2, 2, 2)$  ilustrando (b) y (c); resta hacer lo propio con (a) y, sobre todo *probar* que son los mínimos.

7. (+) Dados los grafos  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ , determinar cuántas clases de equivalencia representan por la relación de equivalencia  $G \cong H$  sii  $G$  es isomorfo a  $H$ , explicitando los isomorfismos entre los grafos situados en una misma clase y probando la imposibilidad de establecerlos entre los que se hallan en clases distintas. ¿Cuántas clases de equivalencia hay entre los grafos simples 4-regulares de orden 7? ¿Cuántas entre los grafos simples 5-regulares de orden 8? Obtenerlas y graficar sendos representantes.

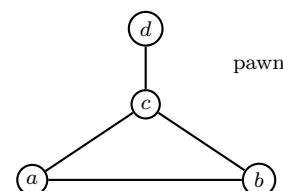


♣ (Resp. Parcial). Dos clases,  $[G_1] = \{G_1, G_2, G_5\}, [G_3] = \{G_3, G_4\}$ : los tres grafos de la primera clase tienen por complemento un ciclo  $C_7$  (¿cuál?), los dos grafos de la segunda tienen por complemento la unión disjunta de dos ciclos  $C_3$  y  $C_4$ . Hay solo dos clases 4-regulares de orden 7; en cambio, hay tres clases 5-regulares de orden 8, representantes de dos de ellas se muestran en la figura, que no son isomorfos pues el complemento de  $H_1$  es un  $C_8$  (¿cuál?), mientras que el complemento de  $H_2$  son dos ciclos disjuntos  $C_4$ .

8. (–) Probar que si un grafo simple  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)|$  es autocomplementario entonces  $n(G) \equiv 0 \pmod{4}$  o  $n(G) \equiv 1 \pmod{4}$  (¿la recíproca es verdadera?). Determinar todos los ciclos  $C_n$  autocomplementarios.

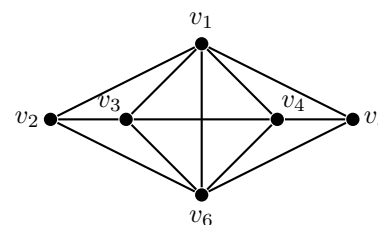
♣ (Resp. Parcial). Si  $G$  es isomorfo a su complemento  $G'$  deben tener el mismo tamaño  $m(G) = m(G')$  y entre ambos sumar el de  $K_n$ , que es  $m(K_n) = n(n-1)/2$ , debiendo ser entonces  $m(G) = m(G') = n(n-1)/4$  y siendo esto un entero y no siendo los números  $n$  y  $n-1$  ambos pares, debe ser uno de ellos divisible en 4, esto es que o bien  $n(G) \equiv 0 \pmod{4}$  o  $n(G) \equiv 1 \pmod{4}$ . La recíproca es falsa, basta considerar, por ejemplo,  $C_4$ , cuyo número de vértices es múltiplo de 4 y sin embargo no es autocomplementario (pues  $C'_4$  tiene dos aristas, mientras que  $C_4$  tiene cuatro aristas). Finalmente, un ciclo  $C_n$  tiene  $n$  aristas y entonces su complementario  $C'_n$  tiene  $n(n-1)/2 - n$  aristas, cantidad que debe ser la misma, esto es  $n(n-1)/2 - n = n$  de donde  $n-1 = 4$ , luego el único ciclo autocomplementario es  $C_5$ .

9. (–) Explicar en general la diferencia entre las nociones de *maximal* y *máximo*; en particular, para el grafo de la figura (al que suele llamársele peón = *pawn*) encontrar todos los maximales *paths*, completos maximales y conjuntos independientes (conjuntos de vértices tales que dos cualesquiera de ellos no son adyacentes) maximales. También encontrar los máximos *paths*, máximos completos y máximos conjuntos independientes.



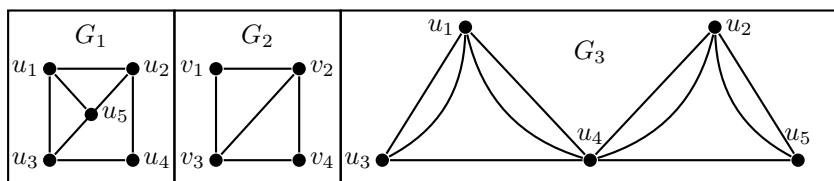
♣ (Resp. Parcial). *Máximo* califica un objeto de medida (en cada caso que se aplica, la forma de medirlo debe ser clara) no superada por otro de la misma naturaleza, mientras que *maximal* significa que no hay otro objeto de la misma naturaleza que lo contenga. Para  $G$  son maximales los *paths*  $acb, abcd, bacd$ , siendo los dos últimos máximos; los maximales completos son  $abc, cd$  (el primero es máximo) y los conjuntos maximales independientes son  $\{c\}, \{bd\}, \{ad\}$ , siendo los dos últimos también máximos (¿Por qué no están en esta lista  $\{d\}$  ni  $\{a\}$  ni  $\{b\}$ ?).

10. (–) Determinar el máximo número de vértices de un subgrafo completo y el de un conjunto independiente en el grafo  $G = (V(G), E(G))$  de la figura. Determinar también la longitud mínima de un ciclo (este número se llama *perímetro* (*girth*) del grafo y se indica con  $g(G)$ ).



♣ (Resp. Parcial). Solo dos vértices ( $v_2$  y  $v_5$ ) tienen grado 3 quedando cuatro vértices, de modo que ningún subgrafo puede alcanzar a ser  $K_5$  (pues no son suficientes los vértices de grado mayor o igual a cuatro); por otra parte  $K_4$  es un subgrafo (el formado por  $V(K_4) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}, E(K_4) = \{v_1v_3, v_1v_4, v_1v_6, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_6\}$ ), de modo que el máximo orden es 4. Por otra parte, puesto que dos vértices ( $v_1$  y  $v_6$ ) son adyacentes a todos los restantes, cualquier conjunto independiente que contenga a uno de ellos solo puede tener un vértice; eliminándolos queda  $P_4$  en el que el máximo cardinal de un conjunto independiente es 2 (y hay tres de estos conjuntos:  $\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}$ ). Finalmente, como el grafo es simple, no tiene ciclos de longitud 1 (lazos) ni de longitud 2 (aristas paralelas), pero sí tiene ciclos de longitud 3 (por ejemplo  $v_1v_2v_3v_1$ ), siendo entonces  $g(G) = 3$ .

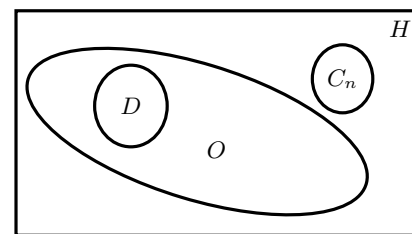
11. (–) Un grafo conexo  $G$  se llama euleriano si tiene un circuito (*circuit*: camino cerrado sin aristas repetidas) que incluye todas sus aristas, mientras que se llama hamiltoniano si tiene un ciclo (*cycle*: camino cerrado sin vértices repetidos) que incluye todos sus vértices. Es semieuleriano si hay un *trail* (camino que no repite aristas) que contiene todas las aristas, y semihamiltoniano si hay un *path* (camino que no repite vértices) que incluya todos sus vértices. Clasificar los grafos siguientes. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $p, q$  para que el bipartito completo  $K_{p,q}$  sea euleriano. ¿Todo grafo euleriano simple con un número par de vértices tiene un número par de aristas?



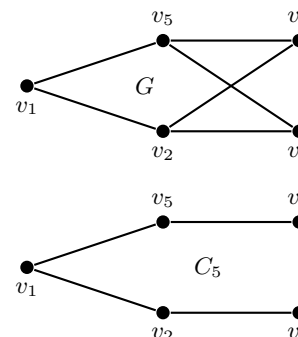
♣ (Resp. Parcial).  $G_2$  es hamiltoniano ( $v_1 v_2 v_4 v_3 v_1$ ), no euleriano pero sí semieuleriano ( $v_2 v_4 v_3 v_2 v_1 v_3$ ).  $G_3$  es no hamiltoniano y semieuleriano;  $G_1$  es hamiltoniano, no euleriano ni semieuleriano.

Se sabe que  $K_{p,q}$  es euleriano sii todos sus vértices tienen grado par, y como el grado de cada uno de los  $p$  vértices es  $q$ , mientras que el grado de cada uno de los  $q$  vértices es  $p$  (por definición de  $K_{p,q}$ , resulta que tanto  $p$  como  $q$  deben ser pares (y alcanza con ello). No: basta considerar el grafo  $C_3 + C_4$  compartiendo un vértice de  $C_3$  con uno de  $C_4$  (dibujarlo), que tiene 6 vértices y siete aristas y es claramente euleriano, pues tiene cinco vértices de grado 2 y el vértice compartido de grado 4; siendo todos pares, debe ser euleriano. Desde luego, no es el único contraejemplo, basta considerar cualquier grafo compuesto por un ciclo  $C_q$  con  $n$  impar y un ciclo  $C_p$  con  $p$  par (de orden al menos tres, para respetar que el grafo sea simple) que compartan un vértice para que resulte un grafo de  $p + q - 1$  vértices (que es un número par) con  $p + q$  aristas (que es un número impar) con todos sus vértices de grado 2, excepto el compartido de grado 4.

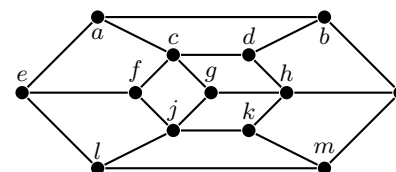
12. (+) Sea  $D$  el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Dirac,  $O$  el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Ore,  $H$  el conjunto de los grafos hamiltonianos y  $C_n$  el conjunto de los ciclos de orden  $n \geq 5$ . Demostrar que se dan las inclusiones estrictas de la figura, esto es que  $D \subset O \subset H$  con  $D \neq O, O \neq H, C_n \subset H \cap O'$ .



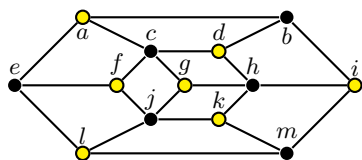
♣ (Resp. Parcial). Sea  $G = ((G), E(G))$  un grafo conexo simple de orden  $n = |V(G)| \geq 3$ . El teorema de Dirac afirma si  $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$  entonces  $G$  es hamiltoniano; el teorema de Ore afirma que si para todo par de vértices no adyacentes  $u, v$  es  $d(u) + d(v) \geq n$  entonces  $G$  es hamiltoniano. Ahora,  $D \subset O$ , pues si  $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$ , entonces  $d(u) + d(v) \geq n/2 + n/2 = n$  (cualesquiera sean  $u, v$ , en particular, no adyacentes). El teorema de Dirac, por lo tanto se deduce del teorema de Ore, y basta probar éste (¡hacerlo, es el núcleo de este ejercicio!) para ver que  $O \subset H$ . El grafo  $G$  de la figura, con  $n = 5$  está en  $O$  (verificar que los grados de cualquier par de vértices no adyacentes suman al menos  $n$  pero no en  $D$  (pues  $d(v_1) = 2 < n/2$ ), de modo que  $O \neq D$ . Finalmente,  $C_n$  está en  $H$  (es hamiltoniano) pero no en  $O$ , pues para cualquier par de vértices no adyacentes  $d(u) + d(v) = 4 < 5 \leq n$ , de modo que  $O \neq H$ . Observación: los ciclos  $C_4$  y  $C_3$  se encuentran ambos en el conjunto  $D$  y entonces no hay ningún ciclo que se encuentre en  $O$  pero no en  $D$ .



13. Definir qué condiciones deben cumplir el conjunto de vértices  $V(G)$  y el de aristas  $E(G)$  para que el grafo  $G = (V(G), E(G))$  sea bipartito y dar un ejemplo, siempre que exista, de un grafo bipartito hamiltoniano de 8 vértices y 9 aristas. ¿El grafo de la figura es hamiltoniano? Probar el siguiente resultado general: ningún grafo bipartito de orden impar puede ser hamiltoniano.

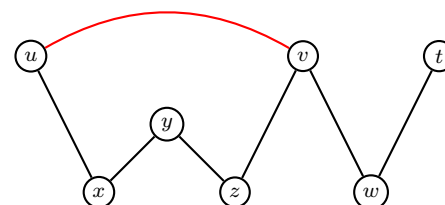


♣ (Resp. Parcial). Siendo  $G$  bipartito, existen los conjuntos disjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tales que  $V(G) = V_1 \cup V_2$  y toda arista de  $E(G)$  une un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ . Cualquier ciclo hamiltoniano debe alternar entre  $V_1$  y  $V_2$  terminando en el mismo conjunto en que inicia, de donde necesariamente  $n_1 = |V_1|$  y  $n_2 = |V_2|$  deben ser iguales, lo que es imposible si el orden  $n = |V(G)| = |V_1| + |V_2| = n_1 + n_2 = 2n_1$  es impar (ya que  $2n_1$  es par para cualquier natural  $n_1$ ). El grafo no es hamiltoniano, pues es bipartito de orden  $n = 13$ , impar, con  $V_1 = \{a, d, f, g, i, k, l\}$  (nodos amarillos),  $V_2 = \{b, c, e, h, j, m\}$  (nodos negros).



14. (+) Un *path maximal* en  $G = (V(G), E(G))$  es un *path*  $P$  en  $G$  que no está contenido en un *path* de mayor longitud (observar que todo grafo finito debe tener un *path* maximal). Probar que si el grado mínimo  $\delta(G)$  es al menos 2, entonces  $G$  tiene al menos un ciclo. Probar además que todo grafo de orden  $n = |V(G)|$  con al menos  $n$  aristas contiene un ciclo.

♣ Respuesta parcial. Sea  $P$  un *path* maximal en  $G$  y sea  $u$  un vértice extremo de  $P$ ; como  $P$  no puede ser extendido todo vértice adyacente a  $u$  debe estar ya en  $P$  (pues en caso contrario, ese vértice prolongaría  $P$ ) y como además el grado de  $u$  es al menos 2, debe haber al menos un vértice  $v$  en  $V(P)$  que es adyacente a  $u$  y cuya arista  $uv$  no está en  $E(P)$ , de modo que hay un ciclo con esa arista completando la porción de  $P$  que va de  $u$  a  $v$ . Observación: como siempre, se sobrentiende un grafo finito; de no ser  $G$  un grafo finito la conclusión ya no semantiene, como lo prueba por ejemplo el grafo  $G$  cuyo conjunto de vértices es  $V(G) = \mathbb{Z}$  y su conjunto de aristas  $E(G) = \{ij : |i - j| = 1\}$ , se tiene que el grado de todos los vértices es 2 y no hay ciclo alguno (como tampoco hay un *path* maximal).



Para la segunda parte se hace inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$  y tiene al menos una arista, tiene un *loop* que es un ciclo. Si  $n > 1$  y  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado a lo sumo 1,  $G - v$  tiene  $n - 1$  vértices y al menos  $n - 1$  aristas (pues la eliminación de  $v$  elimina a lo sumo una arista), de modo que por hipótesis inductiva,  $G - v$  tiene un ciclo, ciclo que también está en  $G$ . Si, en cambio, no hay un tal vértice, entonces todos tienen grado al menos 2 y se aplica lo probado antes. Luego  $G$  tiene un ciclo.

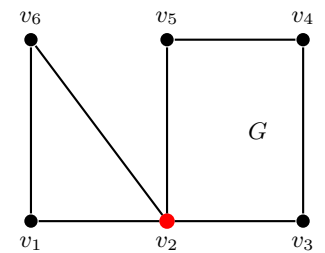
15. (-) Sea  $G = (V(G), E(G))$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{15}\}$  y tal que  $v_i v_j \in E(G)$  sii  $\text{mcd}(i, j) > 1$ . Determinar la cantidad de componentes conexas de  $G$  y la longitud de un *path* maximal en  $G$  y determinar si es bipartito.

♣ (Resp. Parcial). El grafo tiene tres vértices aislados:  $v_1, v_{11}, v_{13}$ . Los restantes constituyen una sola componente con un árbol generador  $v_7, v_{14}, v_{10}, v_5, v_{15}, v_3, v_9, v_{12}, v_8, v_6, v_4, v_2$ , por lo tanto el grafo tiene cuatro componentes, la longitud del *path* maximal es 11 y no es bipartito pues, por ejemplo, contiene al triángulo  $v_2, v_4, v_6$  (y entonces si fuera bipartito y  $v_2$  está en una de las componentes, la existencia de las aristas  $v_2 v_4$  y  $v_2 v_6$  exige que  $v_4$  y  $v_6$  estén en la otra componente conexa y por lo tanto  $v_4 v_6 \notin E(G)$ ; pero la arista  $v_4 v_6 \in E(G)$ , contradicción que prueba que  $G$  no es bipartito).

16. (–) Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones acerca del grafo  $G = (V(G), E(G))$ .

- (a) Todo grafo euleriano tiene un número par de aristas.
- (b) Todo grafo euleriano bipartito tiene un número par de aristas.
- (c) Todo grafo euleriano simple con un número par de vértices tiene un número par de aristas.
- (d) Si  $A$  es la matriz de adyacencia de un grafo simple bipartito, entonces cualquiera sea el impar  $k$ , la matriz  $A^k$  tiene su diagonal principal nula.

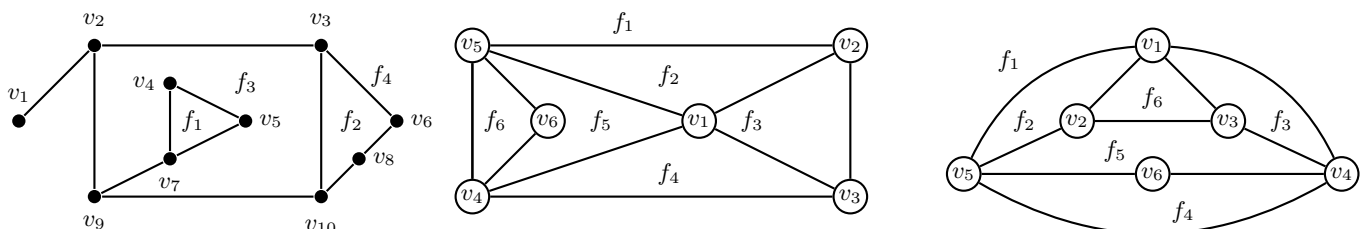
♣ (Resp. Parcial). Para ver que la primera es falsa basta pensar  $C_3$ ; la segunda es verdadera, pues por ser euleriano el grado de todos sus vértices es par; ahora si  $V_1 \subset E(G)$  es una de las dos componentes del grafo bipartito, la cantidad de aristas del grafo es la cantidad de aristas que salen de esa componente, valor que se obtiene exactamente sumando los grados de los vértices de  $V_1$ . Como todos los sumandos son pares, la suma (esto es, la cantidad de aristas) es par. La tercera es falsa, para lo que basta considerar la unión de un ciclo par con uno impar que compartan un vértice como articulación: el grafo es euleriano, pues el grado de todos sus vértices es 2, excepto el vértice compartido cuyo grado es 4 y el número de aristas es la suma de un número par (las aristas del ciclo par) y un número impar (las aristas del ciclo impar), valor que es impar. La cuarta es verdadera, pues  $A^k(i, i)$  cuenta los caminos cerrados de longitud (impar)  $k$  que contiene a  $v_i \in V(G)$ , pero un bipartito no tiene ciclos impares (y entonces no tiene caminos cerrados impares). *Observación:* la recíproca también es verdadera.



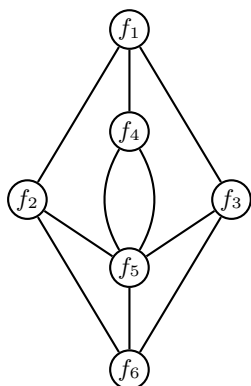
17. (+) Un grafo conexo sin ciclos  $T = (V(T), E(T))$  con  $n(T) = |V(T)|$  vértices y  $m(T) = |E(T)|$  aristas es *por definición* un árbol. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes: (a)  $T$  es un árbol; (b)  $T$  no tiene ciclos y  $m(T) = n(T) - 1$ ; (c)  $T$  es conexo y  $m(T) = n(T) - 1$ ; (d)  $T$  es conexo *minimal* (la remoción de cualquier arista desconecta el grafo); (e) Cualquier par de vértices de  $T$  está conectado por exactamente un *path*; (f)  $T$  no tiene ciclos y el añadido de una arista crea un ciclo.

♣ (Resp. Parcial). Aunque la forma más eficiente de probar las cinco equivalencias es disponer las cinco proposiciones en un ciclo conectando cada una con la siguiente por una implicación, se recomienda la prueba de las  $10 = \binom{5}{2}$  equivalencias. Por ejemplo (a)  $\Rightarrow$  (e): entre cualquier par de vértices existe al menos un *path* pues es  $T$  conexo y si hubiese más de un *path* conectándolos, la unión de dos de esos *paths* sería un ciclo, lo que no es posible por hipótesis. Para la recíproca (e)  $\Rightarrow$  (a): como hay un *path* entre cualquier par de vértices,  $T$  es conexo; además, si  $T$  tuviese un ciclo y dos vértices  $u$  y  $v$  estuvieran incluidos en el ciclo, entonces se tendrían dos (¡y no uno!) *paths* entre esos vértices, de modo que  $T$  no tiene ciclos. Otra implicación, (e)  $\Rightarrow$  (d): primero,  $T$  es conexo (ya que entre cualquier par de vértices hay un *path*); además, si  $e \in E(T)$  es una arista que conecta el vértice  $u$  con el vértice  $v$ , un camino que conecta  $u$  con  $v$  es, precisamente,  $uev$ , pero por hipótesis ese es el *único* modo de conectar  $u$  con  $v$ , de modo que la supresión de la arista  $e$  desconecta el grafo  $T$ .

18. (+) Para un grafo conexo y *planar* (admite una representación en el plano con aristas solo intersecadas eventualmente en vértices)  $G = (V(G), E(G))$  de  $f(G)$  caras (*faces*),  $n(G) = |V(G)|$ ,  $m(G) = |E(G)|$  probar la *fórmula de Euler* ( $n - m + f = 2$ ), el *faceshaking lemma* (la suma de los grados de las caras es igual al doble de su tamaño  $m$ ), y que el grafo dual  $G^*$  tiene  $f$  vértices,  $n$  caras y  $m$  aristas. Probar además que en un grafo planar conexo simple con  $n \geq 3$  debe ser  $m \leq 3(n - 2)$ , y si  $G$  no tiene triángulos  $m \leq 2(n - 2)$  y utilizar estos resultados para probar que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares. Mostrar el cumplimiento de la fórmula de Euler y el *faceshaking lemma* para los siguientes grafos y representar sus duales. ¿Cuál es el menor valor de  $n$  para el que  $K_n$  no es planar? ¿Cuál es el menor valor de  $n$  para el que  $K_{n,n}$  no es planar?

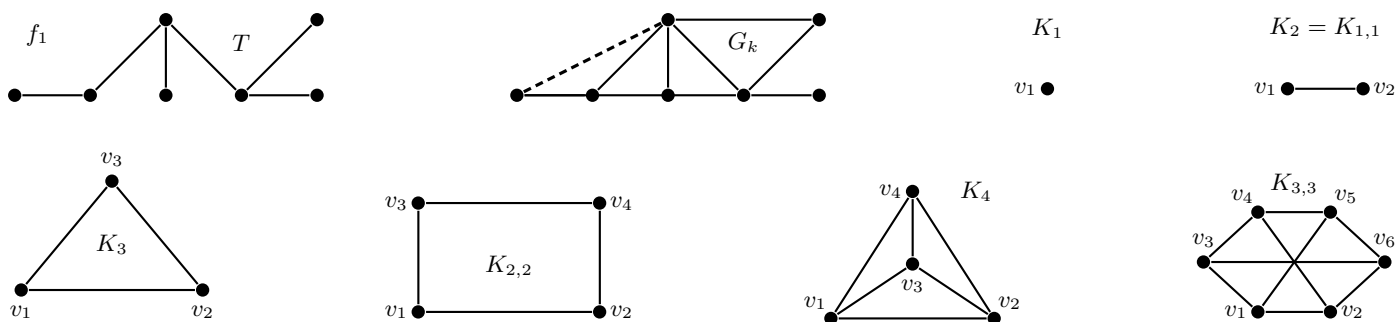




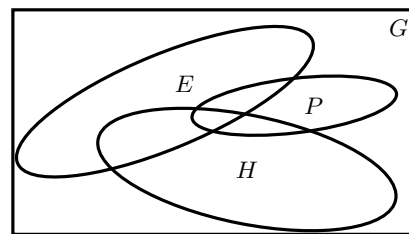


♣ (Resp. Parcial). Para el primer grafo es  $n = 10, m = 12, f = 4$ , de modo que  $n - m + f = 10 - 12 + 4 = 2$ ; los grados de sus caras son  $d(f_1) = 3, d(f_2) = 4, d(f_3) = 9, d(f_4) = 8$  cuya suma es 24 (el doble de  $m = 12$ ); además cumple  $m = 12 \leq 3(n - 2) = 24$ . En general para un grafo simple planar ( $n \geq 3$ ) el grado de cada cara es al menos 3 y entonces (*faceshaking lemma*)  $2m \geq 3f$  y como (fórmula de Euler) es  $f = m - n + 2$  resulta que  $3(m - n + 2) \leq 2m$  de donde  $m \leq 3(n - 2)$ . Si en particular  $K_5$  fuera planar ( $n = 5, m = 10$ ) debería ser  $10 \leq 3(5 - 2) = 9$ , lo que es imposible, de modo que  $K_5$  no es planar. Otra vez, en general, si el grafo carece de triángulos, el grado de cada cara es al menos 4, y (*faceshaking lemma*)  $2m \geq 4f$  y como es  $f = m - n + 2$  resulta que  $4(m - n + 2) \leq 2m$  de donde  $m \leq 2(n - 2)$ . Si en particular  $K_{3,3}$  (que está libre de triángulos) fuera planar ( $n = 6, m = 9$ ) debería ser  $9 \leq 2(6 - 2) = 8$ , lo que es imposible, de modo que  $K_{3,3}$  no es planar. La segunda y la tercera figura representan *el mismo* grafo (son dos *inmersiones*), y a la izquierda se representa el dual de una de estas inmersiones; mostrar que los duales de dos representaciones del mismo grafo ¡no necesariamente son isomorfos!

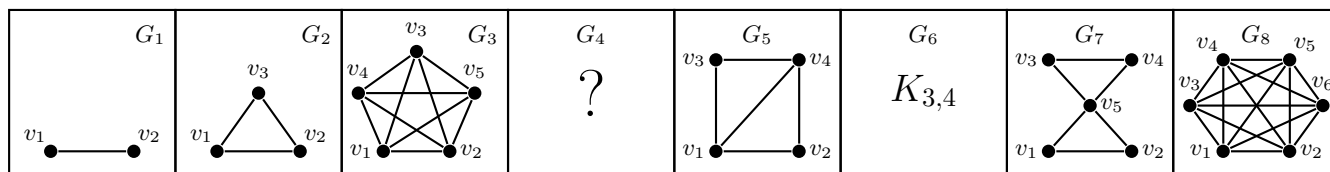
Una prueba de la fórmula de Euler supone sabido que cualquier grafo conexo se construye partiendo de un árbol generador  $T$  añadiendo una arista por vez. En  $T$  se sabe que  $f = 1$  (cualquier inmersión del árbol tiene solo una cara), y además el número de aristas es  $m = n - 1$ , de modo que  $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ . Ahora, en cada estado, la adición de una arista no cambia el valor de  $n$ , e incrementa en 1 el número de aristas ( $m$  pasa a  $m + 1$ ) y el número de caras se incrementa en 1 ( $f$  pasa a  $f + 1$ ) pues la arista añadida o bien conecta dos vértices o bien es un lazo, y en cualquier caso divide una cara existente en dos (la figura muestra el  $k$ -ésimo estado  $G_k$  en que se añade la arista punteada, que divide en dos la cara no acotada): luego el valor  $n - m + f$  no se altera en cada paso, y al finalizar la construcción del grafo  $G$ , permanece en el valor del árbol generador  $T$ , esto es, 2. Finalmente, las figuras prueban que  $K_1, K_2, K_3, K_4$  son planares, de modo que el menor valor de  $n$  para el que  $K_n$  no es planar es 5; del mismo modo (ver figuras), siendo planares  $K_{1,1}, K_{2,2}$ , el menor valor de  $n$  para el que  $K_{n,n}$  no es planar es 3.



19. (+) Sea  $E$  el conjunto de los grafos eulerianos,  $H$  el conjunto de los grafos hamiltonianos,  $P$  el conjunto de los grafos planares y  $G$  el conjunto de los grafos en general, los que se esquematizan en la figura. Analizar si alguna de las ocho regiones de la figura es vacía. Para cada región que se afirme no vacía, dar un grafo mostrando su pertenencia a la región, como por ejemplo  $K_2 \in PE'H'$ , ya que es planar y no es euleriano ni hamiltoniano; si en cambio, se afirmara que alguna región es vacía, probar la imposibilidad de un tal grafo.

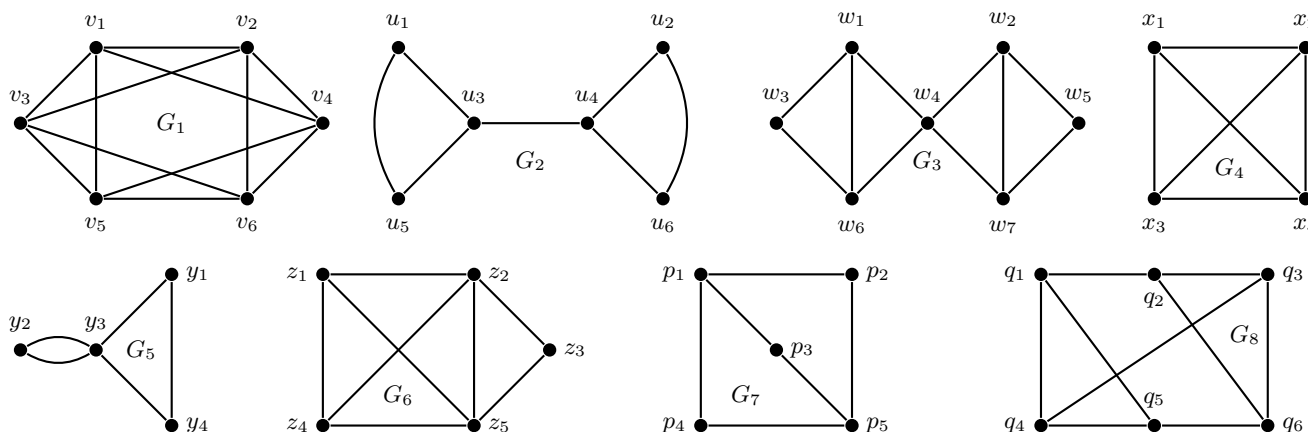


♣ (Resp. Parcial). Se tienen en total 8 regiones y la figura siguiente presenta grafos que se encuentran exclusivamente en alguna de ellas; por ejemplo,  $G_1 \in PE'H'$ , ya que es planar (como lo prueba su misma representación) y no es euleriano ni hamiltoniano (¿por qué?),  $G_2 \in PEH, G_3 \in P'EH, G_5 \in PE'H, G_6 \in P'E'H', G_7 \in PEH', G_8 \in P'E'H$ . Ubicar cada uno de ellos, y justificar el motivo de la ubicación asignada. Falta un grafo correspondiente a una región (¿cuál? ¿es posible un tal grafo? ¿o la región está vacía?).



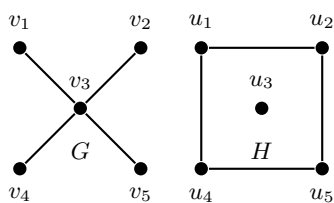
20. (+) Dado el grafo sin lazos  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)|$  y tamaño  $m(G) = |E(G)|$  se define el *grafo-arista* (*edge graph or line graph*)  $L(G)$  como el grafo obtenido tomando las aristas de  $G$  como vértices de  $L(G)$  y uniendo dos de estos vértices siempre que sus correspondientes aristas en  $G$  tengan un vértice común. Obtener el *line graph* de cada uno de los grafos representados y resolver las siguientes cuestiones.

- (a) Si  $u \in V(L(G))$  corresponde a la arista  $xy \in E(G)$  ¿cuál es el grado de  $u$  en función de los grados de  $x$  e  $y$ ? Determinar el orden y el tamaño de  $L(K_n)$ .
- (b) Determinar el *line graph* de un camino simple (*path*)  $P_n$  y de un ciclo (*cycle*)  $C_n$ , siendo  $n > 2$ .
- (c) Probar que  $G$  es isomorfo a  $L(G)$  sii es 2-regular y que la ecuación en la incógnita  $G$  dada por  $L(G) = K_n, n > 3$  tiene como única solución  $G = K_{1,n}$ .
- (d) Sean  $G$  y  $H$  dos grafos simples tales que  $L(G) = L(H)$ . ¿Deben entonces ser  $G$  y  $H$  isomorfos?
- (e) Existe un único (salvo isomorfismo) grafo simple  $G$  cuya sucesión de grados es  $d = (1, 2, 3, 3, 3)$ ; ¿cuántas aristas tiene  $L(G)$ ? Graficarlo.
- (f) Determinar el orden y tamaño de  $L(G)$ , siendo  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n = |V(G)|$  y tamaño  $m = |E(G)|$  y sucesión de grados  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ .
- (g) Probar que es suficiente que  $G$  sea euleriano para que  $L(G)$  sea euleriano y hamiltoniano, pero que la recíproca es falsa.
- (h) Probar que para que  $G$  sea hamiltoniano es necesario que  $L(G)$  sea hamiltoniano, pero que la recíproca es falsa.

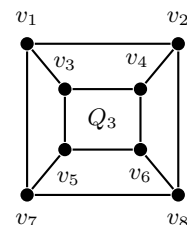


♣ (Resp. Parcial). Identificando las correspondencias es  $L(G_4) = G_1, L(G_2) = G_3, L(G_5) = G_6, L(G_7) = G_8$  (por ejemplo en  $G_8$  el vértice  $q_1$  se corresponde a la arista  $p_1p_2, q_2$  con  $p_2p_5, q_3$  con  $p_4p_5 \dots$ ). (a)  $d(u) = d(x) + d(y) - 2$ ; además  $L(K_n)$  tiene orden  $n(n-1)/2$  y como cualquier arista en  $K_n$  es adyacente a otras  $2(n-2)$ , resulta que  $L(K_n)$  es  $2(n-2)$ -regular y la suma de los grados de los vértices de  $L(K_n)$  es  $n(n-1)(n-2)$  de donde el tamaño de  $L(K_n)$  es  $n(n-1)(n-2)/2$ . (b)  $P_{n-1}, C_n$ . (c) El si: si  $G$  es 2-regular (i. e. *handshaking lemma*  $n = m$ ) cada arista es adyacente a exactamente otras dos, de modo que  $L(G)$  es 2-regular, y además  $L(G)$  tiene  $m$  vértices, y entonces por ser 2-regular también tiene  $n = m$  aristas, entonces  $G$  es isomorfo a  $L(G)$ ; para la segunda parte es claro (probarlo) que  $L(K_{1,n}) = K_n$ , de modo que  $K_{1,n}$  es una solución que además es única pues si  $L(G) = K_n$  debe  $G$  tener  $n$  aristas y todas tienen exactamente un vértice común, ya que el grado de cada vértice de  $K_n$  es  $n-1$ : luego,  $G = K_{1,n}$ . (d) No,  $L(K_3) = K_3 = L(K_{1,3})$  y  $K_3$  no es isomorfo a  $K_{1,3}$ . (e) 10. (f) El orden de  $L(G)$  es, por definición,  $m$ . El tamaño es (¿ por qué?)  $m(L(G)) = \sum_{k=1}^n \binom{d_k}{2}$  y operando queda  $m(L(G)) = (1/2) \sum_{k=1}^n d_k^2 - m$ . (g) Una vez probado que  $L(G)$  es euleriano es inmediato que es hamiltoniano: el circuito euleriano de aristas en  $G$  se convierte en un ciclo hamiltoniano en  $L(G)$ ; que la recíproca es falsa lo prueba que  $L(G_4) = G_1$  es euleriano y hamiltoniano, pero  $G_4$  no es euleriano (es 3-regular). (h) Para la falsedad de la recíproca ver que  $L(G_7) = G_8$ , con  $G_8$  hamiltoniano y  $G_7$  no.

21. (+) Si  $A$  es la matriz de adyacencia del grafo simple  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)|$  y tamaño  $m(G) = |E(G)|$ , los *autovalores (eigenvalues)* de  $G$  son los autovalores de  $A$  siendo su espectro  $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Probar que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2m$  y que si  $\tau$  es la cantidad de triángulos en  $G$ , es  $\sum_{k=1}^n \lambda_k^3 = 6\tau$ ; comprobar estas igualdades con el espectro de  $Q_3$ . Determinar el espectro de  $K_n$ , de  $K_{r,s}$ , de  $P_n$ , de  $C_n$ . Probar que dos grafos isomorfos deben tener el mismo espectro, pero que la recíproca es falsa. ¿Dos grafos con el mismo espectro pueden tener distinto diámetro? ¿Un grafo conexo puede tener el mismo espectro que uno no conexo?

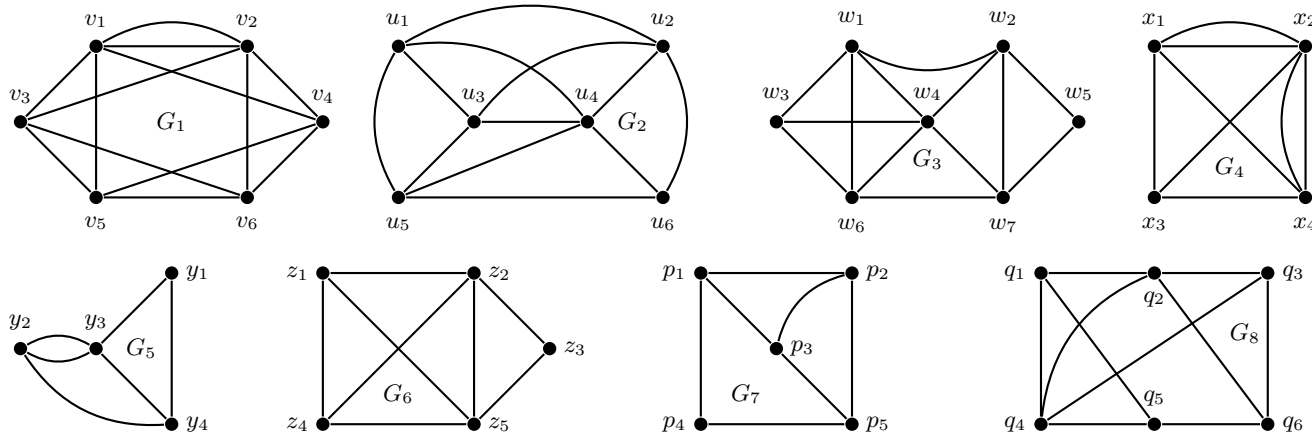


♣ (Resp. Parcial). Siendo  $A$  simétrica es semejante a  $D = \text{diag}(\sigma(G)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y siendo nula la traza de  $A$ , también lo es  $\text{tr}(D) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ ; como  $d(v_k) = A_{kk}^2$  (¿por qué?) y  $A^2$  es semejante a  $D^2$ , del *handshaking lemma* resulta que  $2m = \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ ; para la cantidad de triángulos considerar qué representa el  $k$ -ésimo elemento de la diagonal de  $A^3$ . Los espectros (entre paréntesis las multiplicidades cuando no son simples):  $\sigma(Q_3) = \{-3, 3, 1(3), -1(3)\}, \sigma(K_n) = \{n-1, -1(n-1)\}, \sigma(K_{r,s}) = \{\pm\sqrt{rs}, 0(r+s-2)\}, \sigma(P_n) = \{2 \cos(k\pi/(n+1)), k = 1, 2, \dots, n\}$ . Los grafos no isomorfos  $G$  (conexo) y  $H$  (no conexo) de la figura son tales que  $\sigma(G) = \{\pm 2, 0(3)\} = \sigma(H), \phi(G) = 2 \neq \infty = \phi(H)$ .

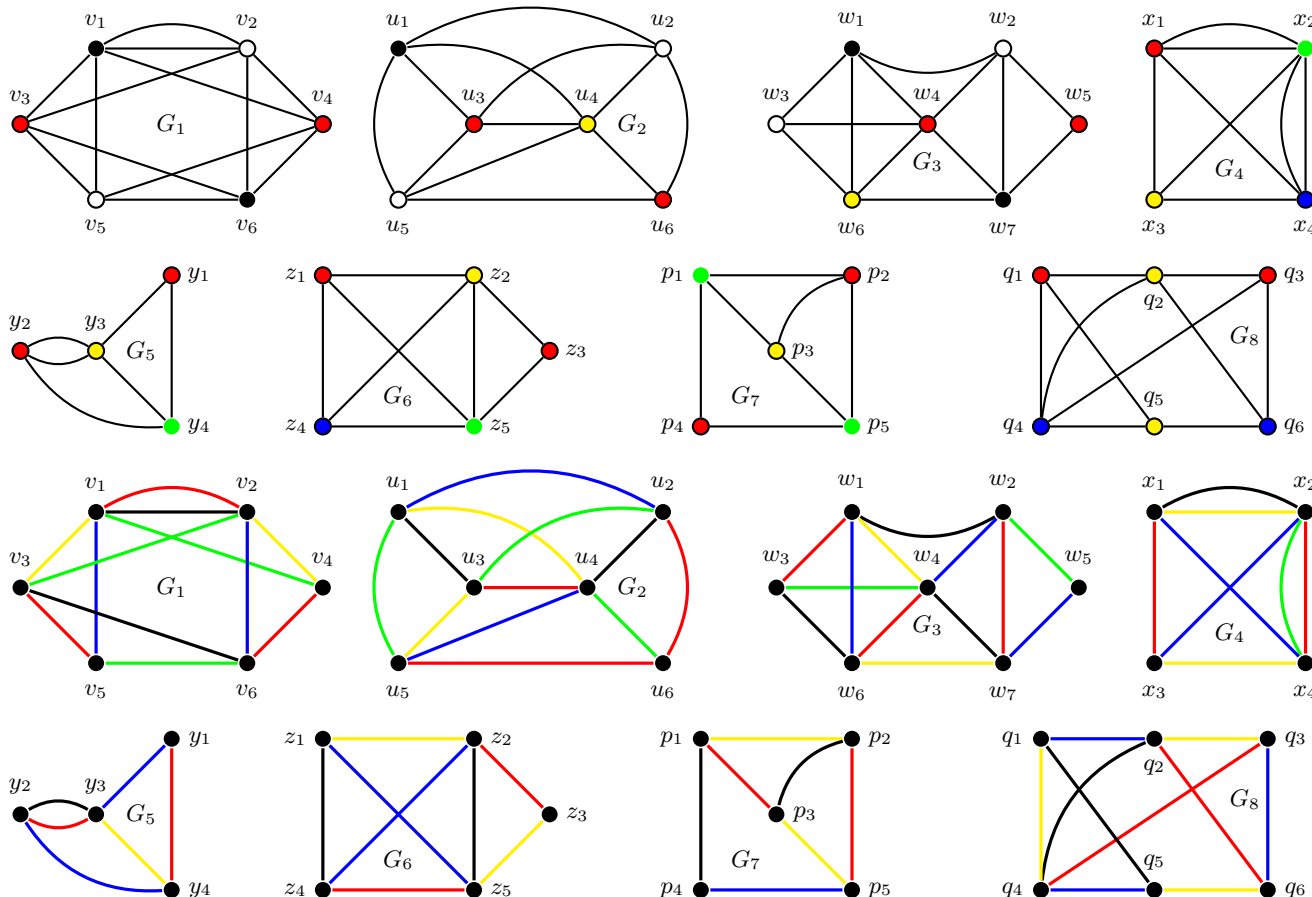




22. Sea  $G$  un grafo sin lazos. Una  $k$ -coloración ( $k$ -coloring) de vértices (aristas) es una asignación de  $k$  colores a los vértices (aristas) de modo que dos vértices (aristas) adyacentes tengan distintos colores asignados; el menor  $k$  para el que  $G$  tiene una  $k$ -coloración de vértices (aristas) se designa con  $\kappa(G)$  ( $\kappa'(G)$ ) y se llama número cromático (índice cromático). Determinar el número cromático  $\kappa$  de  $C_n, W_n, P_n, K_n, K_{1,q}, K_{p,q}, Q_n, F$  (donde  $F$  es un bosque), el índice cromático  $\kappa'$  de  $C_n, P_n, K_{1,q}, K_{p,q}$  y ambos números para cada uno de los grafos de las figuras, mostrando la correspondiente coloración. Probar además que un grafo  $G$  contiene  $K_n$  solo si  $\kappa(G) \geq n$ , pero que la recíproca es falsa. Finalmente, probar que  $\kappa(G) \leq \Delta + 1, \Delta \leq \kappa'(G) \leq \Delta + 1$ , siendo  $\Delta = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$ .

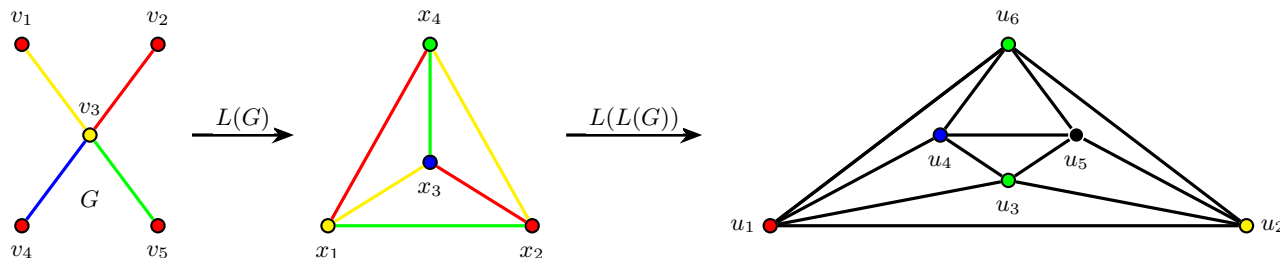


♣ (Resp. Parcial).  $\kappa(C_n) = 2$  si  $n$  es par (3, si  $n \geq 3$  es impar),  $\kappa(P_n) = 2, n \geq 2, \kappa(K_n) = n, \kappa(K_{1,q}) = 2 = \kappa(K_{p,q}), \kappa(Q_n) = 2, \kappa(F) = 2$ . En las siguientes figuras se muestran coloraciones de vértices y aristas para cada uno de los grafos, de donde se obtienen sus números cromáticos. Por ejemplo, el grafo  $G_2$  contiene a  $K_4$  como subgrafo, y entonces  $\kappa(G_2) \geq 4$ , y la figura muestra una 4-coloración de vértices, luego  $\kappa(G_2) \leq 4$ , de donde  $\kappa(G_2) = 4$ . Para el mismo grafo  $G_2$ , su sucesión gráfica es  $d = (3, 4, 4, 4, 4, 5)$  y entonces es  $\Delta = 5$ , de modo que debe tenerse que el índice cromático cumple  $\kappa'(G_2) \geq \Delta = 5$  y en la figura se muestra una 5-coloración de aristas, luego  $\kappa'(G_2) \leq 5$ , de donde  $\kappa'(G_2) = 5$ . La recíproca es falsa:  $\kappa(C_7) = 3$  y sin embargo  $K_3$  no es subgrafo de  $C_7$ . La prueba de la directa: si  $K_n$  es un subgrafo de  $G$ , entonces hay  $n$  vértices del grafo tal que uno cualquiera es adyacente a los  $n - 1$  restantes, y entonces ya se requieren  $n$  colores distintos para cualquier coloración del grafo, de modo que  $\kappa(G) \geq n$ .



23. (+) Definir, siempre que exista, un grafo conexo planar simple  $G = (V(G), E(G))$  de espectro  $\sigma(G) = \{-2, 0(\text{triple}), 2\}$  y determinar el número cromático  $\kappa(L(G))$  e índice cromático  $\kappa'(L(G))$  de su grafo-arista  $L(G)$ . ¿Es planar  $L(L(G))$ ? ¿Puede decirse que las sucesivas aplicaciones de  $L$  sobre un grafo aumentan los índices o números de coloración?

♣ (Resp. Parcial). (1.a). Un grafo, ¡no el único!, posible es  $G = K_{1,4}$  (se sabe que el espectro de un bipartito completo es  $\sigma(K_{r,s}) = \{\pm\sqrt{rs}, 0(r+s-2)\}$ ) y como  $L(K_{1,4}) = K_4$  resulta que (justificar)  $\kappa(L(K_{1,4})) = 4, \kappa'(L(K_{1,4})) = 3$ . Por otra parte,  $L(K_4)$  es el grafo planar 4-regular indicado en la figura. Completar los detalles de las correspondencias, esto es  $x_1$  es el vértice que representa la arista  $v_1v_3$ , como  $u_1$  representa la arista  $x_1x_2$ . Mucho puede aprenderse rehaciendo este ejercicio partiendo de un distinto  $G$  que satisfaga lo pedido, como por ejemplo con  $G = K_{2,2} + N_1$ .



El índice cromático de  $G$  es 4 mientras que el de  $L(G)$  es 3, de modo que no crece con la aplicación de  $L$ . En cambio los respectivos números cromáticos de  $G, L(G), L(L(G))$  son 2, 4, 5 ¿seguirán creciendo?

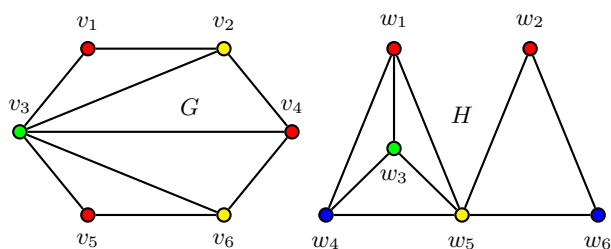
24. (-) No existe un grafo simple  $G$  planar tal que su complemento  $G'$  sea planar y su orden sea mayor que 10. ¿Verdadero o falso?

♣ (Resp. Parcial). La afirmación es verdadera. Sean  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n = |V(G)| > 10$  y tamaño  $m = |E(G)|$  y su complemento  $G' = (V(G), E(G'))$ , que tiene el mismo orden  $n$  y tamaño  $m' = |E(G')| = n(n-1)/2 - m$  (¿por qué?). Supóngase que ambos son planares. Debe cumplirse (¿por qué?) que  $m \leq 3(n-2), m' \leq 3(n-2)$  y entonces que  $n(n-1)/2 \leq 3(n-2) + m \leq 3(n-2) + 3(n-2) = 6n - 12$ , desigualdad equivalente a  $n^2 - 13n + 24 \leq 0$  que es imposible para cualquier natural  $n > 10$  (¿cómo se prueba esta afirmación?). Luego no pueden ser ambos planares.

25. (+) Probar que: (a) todo grafo  $G = (V(G), E(G))$  planar conexo de orden  $n = |V(G)| \geq 3$  tiene al menos un vértice  $v$  de grado  $d(v) \leq 5$ . (b) Todo grafo planar es 5-coloreable.

♣ (Resp. Parcial). (a) Sea  $G = (V(G), E(G))$  planar conexo de orden  $n = |V(G)| \geq 3$  y tamaño  $m = |E(G)|$  y tal que el grado de ninguno de sus vértices es menor o igual que 5. Entonces, cualquiera sea  $v_k \in V(G)$  es  $d(v_k) \geq 6$ , y como  $2m$  (handshaking lemma) es la suma de los grados de todos los vértices se tiene  $2m = \sum_{k=1}^n d(v_k) \geq 6n$ , esto es que  $m \geq 3n$ , y además ( $G$  es planar) debe ser  $m \leq 3(n-2)$ , en otras palabras,  $3n \leq m \leq 3n - 6$  de donde  $3n \leq 3n - 6$ , contradicción que prueba lo pedido (¿por qué?). (b) Si  $G = (V(G), E(G))$  con  $n = |V(G)|$ . El teorema para  $n \leq 5$  es obvio (se dispone de 5 colores a ser asignados en a lo sumo 5 vértices), de modo que resta probarlo para  $n > 5$ . Esta parte se hace por inducción, se sabe que siendo  $p(n)$  la afirmación,  $p(5)$  es válida, y ahora se quiere ver que  $p(n-1) \Rightarrow p(n)$ . La idea básica es que (por lo probado en (a) el grafo  $G$  de orden  $n > 5$  tiene al menos un vértice  $u$  de grado a lo sumo 5, de modo que el grafo  $G - u$  es de orden  $n - 1$  y por lo tanto 5-coloreable, de modo que para completar una coloración de  $G$  debe asignarse un color al vértice  $u$ . Si su grado es a lo sumo 4, se asigna un color no utilizado en sus vértices adyacentes; si es 5, y sus cinco vértices adyacentes no utilizan en la coloración de  $G - u$  los cinco colores, se asigna uno no utilizado. Finalmente, queda considerar el caso en que  $u$  tiene 5 vértices adyacentes ya coloreados (en la coloración de  $G - u$ ) con los cinco colores disponibles: ¿cómo resolverlo? Hacer un diagrama con la estrella  $K_{1,5}$  con  $u$  en el centro y razonar sobre dos colores de sus satélites...

26. (+) Definir, siempre que sea posible, dos grafos planares simples no isomorfos  $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$  que tengan la misma sucesión de grados  $d = (2, 2, 3, 3, 3, 5)$ , el mismo radio ( $r(G) = r(H)$ ), el mismo diámetro ( $\phi(G) = \phi(H)$ ) y el mismo índice cromático ( $\kappa'(G) = \kappa'(H)$ ). Determinar luego el número cromático de cada uno y analizar si son hamiltonianos.



♣ (Resp. Parcial). Los grafos  $G, H$  representados en las figuras (definirlos por su conjunto de vértices y aristas) satisfacen lo pedido; tienen la misma sucesión de grados pues  $d(v_1) = d(v_5) = d(w_2) = d(w_6) = 2, d(v_2) = d(v_4) = d(v_6) = d(w_1) = d(w_3) = d(w_4) = 3, d(v_3) = d(w_5) = 5$ , el radio de ambos es 1 (es la excentricidad de  $v_3$  en  $G$  y la excentricidad de  $w_5$  en  $H$ ), el diámetro de ambos es 2 (todos los vértices restantes están en la periferia con excentricidad 2) y el índice cromático de ambos es 5 (probarlo). Son planares, el número cromático de  $G$  es 3 y el de  $H$  es 4 y no isomorfos ( $G$  es hamiltoniano,  $H$  no lo es pues tiene la articulación  $w_5$ ).

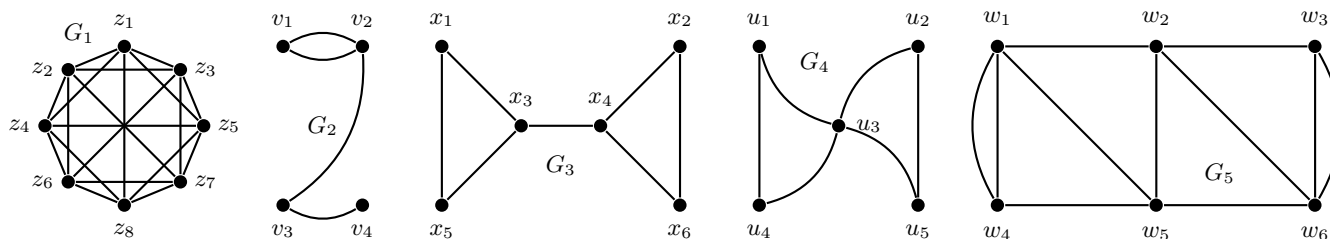
27. (a) (+) Definir, siempre que sea posible, un grafo simple  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)| = 13$  con número cromático  $\kappa(G) = 3$  tal que el número cromático  $\kappa(G')$  de su complemento sea 4.
- (b) (+) Probar que todo grafo sin lazos  $G = (V(G), E(G))$  isomorfo a su grafo-arista  $L(G)$ , es planar; determinar los posibles valores de su número cromático  $\kappa(G)$  e índice cromático  $\kappa'(G)$ .

♣ (Resp. Parcial). (a) Imposible. Como el grafo  $G$  admite una 3-coloración, hay una partición de  $V(G)$  en tres clases, y al menos una de ellas (¿por qué?) debe tener al menos 5 vértices del mismo color (y entonces, por definición de coloración, ninguno de ellos es adyacente a los restantes de esa clase). Pero entonces esos al menos 5 vértices están conectados mutuamente en el complemento  $G'$ , de modo que el número cromático  $\kappa(G')$  de su complemento debe ser al menos 5. † Observación: el ejercicio puede generalizarse, subsumiéndolo en un resultado más general, como propiedad de las coloraciones de  $G'$ , esto es que necesariamente  $\kappa(G)\kappa'(G) \geq n = |V(G)|$ ; es recomendable hacerlo, generalizando el mismo argumento utilizado para el caso particular del ejercicio, con el solo cuidado de indicar que para una  $\kappa(G)$ -coloración de  $G$  se puede asegurar que alguna de las clases que particiona  $V(G)$  tiene al menos  $\lceil n/\kappa(G) \rceil$  vértices de un mismo color.

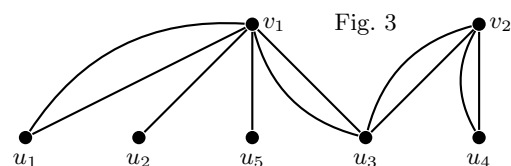
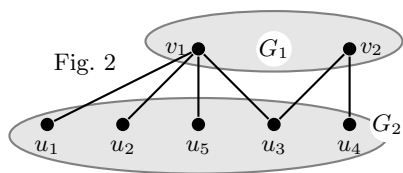
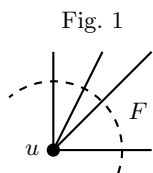
(b) Si  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n = |V(G)|$  y tamaño  $m = |E(G)|$  es isomorfo a  $L(G) = (V(L(G)), E(LG))$  de orden  $n_L = |V(L(G))|$  y tamaño  $m_L = |E(L(G))|$ , debe ser  $n = n_L, m = m_L$ , pero como (por definición de  $L(G)$ ) es  $n_L = m$ , resulta que  $n = n_L = m$  y entonces los cuatro números son iguales  $n = n_L = m = m_L$ , esto es que en particular tanto  $G$  como  $L(G)$  tienen, cada uno, tantas aristas como vértices, y como el grado de cada vértice de  $G$  debe ser igual al correspondiente vértice de  $L(G)$  (ya que son isomorfos), entonces todos los vértices de  $G$  tienen grado 2, esto es que  $G$  es 2-regular; si  $G$  es conexo, es un ciclo  $C_n$  (que es planar), mientras que si no es conexo es la unión disjunta de ciclos  $C_k$  cuyos órdenes suman  $n$  (unión disjunta que también es planar). En cuanto al número cromático, si  $G$  es conexo o bien es  $\kappa(G) = 2$  (si  $n$  es par) o bien es  $\kappa(G) = 3$  (si  $n$  es impar). ¿Y si  $G$  no es conexo? Observar que debe ser (¿por qué?)  $n \geq 3$ ; ¿qué hay de  $\kappa'(G)$ ?

28. Sea  $G = (V(G), E(G))$  conexo. Un conjunto de vértices  $S \subset V(G)$  es un *corte de vértices* (*vertex cut*) sii  $G - S$  tiene más de una componente, y la remoción de solo algunos vértices de  $S$  no desconecta  $G$ . Del mismo modo se define que un conjunto de aristas  $F \subset E(G)$  es un *corte de aristas* (*edges cut*) sii  $G - F$  tiene más de una componente, y la remoción de solo algunas aristas de  $F$  no desconecta  $G$ . La *vértice-conectividad*  $\kappa(G)$  es el mínimo cardinal de  $S$  tal que  $G - S$  es no conexo o tiene un solo vértice, y si  $k \leq \kappa(G)$  el grafo es  $k$ -vértice-conexo. La *arista-conectividad*  $\lambda(G)$  es el mínimo cardinal de  $F$  tal que  $G - F$  es no conexo, y si  $k \leq \lambda(G)$  el grafo es  $k$ -arista-conexo.

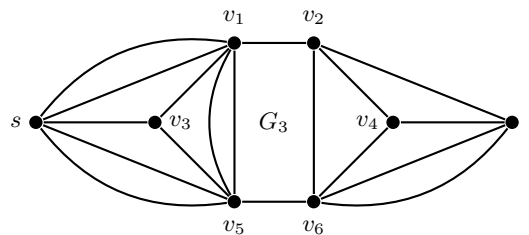
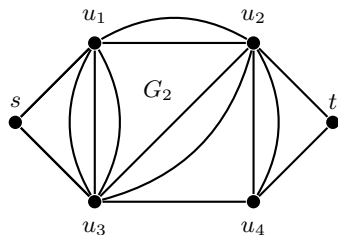
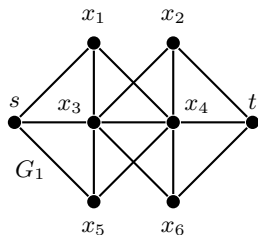
Probar que si  $\delta(G)$  es el mínimo grado de  $G$  se verifica que  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ . Dar conjuntos de cortes y determinar la conectividad (de vértices y aristas) de los grafos de la figura y de: (a)  $K_n$ ; (b)  $K_{1,q}$ ; (c)  $K_{p,q}$ ; (d)  $C_n, n \geq 2$ ; (e)  $P_n, n \geq 2$ ; (f)  $T$ , donde  $T$  es un árbol con  $|V(T)| \geq 2$ .



♣ (Resp. Parcial). Si el grafo  $G$  es  $K_n$ , se tiene, según las definiciones anteriores, que  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n - 1$ , de modo que para  $K_n$  se cumple que  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ ; sea ahora  $G$  simple distinto de  $K_n$ . Por definición de  $\delta(G)$ , si  $u \in V(G)$  es tal que  $d(u) = \delta(G)$  el conjunto  $F$  de las  $\delta(G)$  aristas que inciden en  $u$  es un corte (pues desconecta el vértice  $u$  de los restantes, ver Fig. 1), y siendo  $\lambda(G)$  el cardinal de un corte de aristas minimal, resulta que  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ . Como  $G$  no es  $K_n$ , se sabe que  $\lambda(G) \leq \delta(G) \leq n - 2$ , por lo que hay al menos un corte  $F$  de cardinal  $\lambda(G)$  que separa el grafo  $G$  en dos componentes conexas  $G_1$  y  $G_2$  (ver Fig. 2), pero la remoción de estas  $\lambda(G)$  aristas de  $F$  también se logra eliminando un conjunto de vértices adecuadamente escogidos de ambas componentes, de modo de no dejar vacía ninguna de ellas incidentes sobre esas aristas, y entonces se tiene un corte de vértices  $S$  (por ejemplo,  $S = \{v_1, u_3, u_4\}$  en la Fig. 2): en efecto, ya que a lo sumo deben eliminarse  $n - 2$  aristas, y en cada paso se elimina *al menos* una de estas  $n - 2$ , puede completarse la eliminación sin vaciar  $G_1$  ni  $G_2$  (¿por qué?). Así, el cardinal de  $|S|$  es a lo sumo  $\lambda(G)$ ; luego como por definición de  $\kappa(G)$  debe ser  $\kappa(G) \leq |S|$ , y se tiene que  $|S| \leq \lambda(G)$ , resulta que  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ ; esto completa la prueba de que  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$  para los grafos simples. Sea ahora  $G$  un grafo cualquiera, posiblemente con lazos y aristas múltiples (por ejemplo, como en Fig. 3), y sea  $G_s$  obtenido el grafo simple obtenido colapsando sus aristas múltiples en una simple y suprimiendo sus lazos. En tal transformación,  $\kappa(G) = \kappa(G_s)$  y  $\lambda(G_s) \leq \lambda(G)$  (¿por qué?), y como ya se probó que para  $G_s$  es  $\kappa(G_s) \leq \lambda(G_s)$  resulta que  $\kappa(G) = \kappa(G_s) \leq \lambda(G_s) \leq \lambda(G)$ , de modo que también para un grafo no simple es  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ , lo que concluye la prueba de que  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ . Para el resto, es  $\kappa(G_1) = \lambda(G_1) = 5$ ;  $\kappa(G_2) = \lambda(G_2) = 1$ ;  $\kappa(G_3) = \lambda(G_3) = 1$ ;  $\kappa(G_4) = 1, \lambda(G_4) = 2$ ;  $\kappa(G_5) = 2, \lambda(G_5) = 3$ ;  $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n - 1$ ;  $\kappa(K_{1,q}) = \lambda(K_{1,q}) = 1$ ;  $\kappa(K_{p,q}) = \lambda(K_{p,q}) = \min\{p, q\}$ ;  $\kappa(C_n) = 2, \lambda(C_n) = 2$ ;  $\kappa(P_n) = \lambda(P_n) = 1$ ;  $\kappa(T) = \lambda(T) = 1$ .

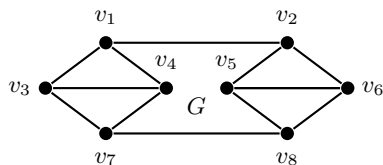


29. Sea  $G = (V(G), E(G))$  conexo y  $s$  y  $t$  dos vértices en  $V(G)$ . Dos o más  $s$ - $t$  paths son de *arista-disjuntos* (de *vértice-disjuntos*) si no comparten aristas (vértices, excepto los extremos). Un subconjunto de  $E(G)$  (de  $V(G)$ ) *separa*  $s$  de  $t$  si su remoción destruye todo path entre  $s$  y  $t$ . Probar que la máxima cantidad de paths arista-disjuntos (o vértice-disjuntos) no supera la mínima cantidad de aristas (vértices) que separan  $s$  de  $t$  (de hecho, son iguales) y determinar la máxima cantidad de  $s$ - $t$  paths disjuntos (vértices o aristas) de cada uno de los grafos de la figura y también de  $K_{p,q}$ . ¿Pueden dos paths ser vértice-disjuntos y no arista-disjuntos, o viceversa?



♣ (Resp. Parcial). Para  $K_{p,q}$  la máxima cantidad de paths disjuntos (vértices o aristas) es  $\min\{p, q\}$ . Si un par de paths vértice-disjuntos no fuese arista-disjuntos compartirían una arista, pero entonces tendrían al menos un vértice (distinto de los extremos del path) común, contradicción que prueba que un par de paths vértice-disjuntos es necesariamente arista-disjuntos; la recíproca es falsa (¡probarlo!). Para  $G_1$  hay un máximo de tres paths arista-disjuntos (por ejemplo,  $s x_1 x_4 t$ ;  $s x_3 x_2 t$ ;  $s x_5 x_4 x_6 t$ ) y dos paths vértice-disjuntos (por ejemplo,  $s x_1 x_4 t$ ;  $s x_3 x_6 t$ ). Para  $G_2$ , y también para  $G_3$  un subconjunto de aristas (de vértices) que separa  $s$  de  $t$  tiene al menos dos elementos; por ejemplo, en  $G_2$ , el conjunto formado por los vértices  $u_2$  y  $u_3$  (de las aristas  $u_2 t$  y  $u_4 t$ ) separan  $s$  y  $t$ .

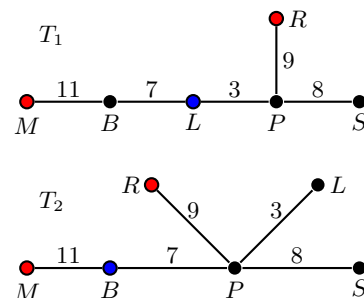
30. (+) Determinar (y probar) el valor de verdad de la siguiente proposición: si  $G = (V(G), E(G))$  es un grafo simple planar de arista-conectividad  $\lambda(G) = 2$  y grado mínimo  $\delta(G) = 3$ , entonces su grafo dual  $G^*$  es simple.



♣ (Resp. Parcial). La proposición es falsa, el grafo conexo  $G$  de la figura es planar, simple, de grado mínimo 3, siendo su conectividad de aristas 2, pues el corte de aristas dado por  $S = \{v_1 v_2, v_7 v_8\}$  desconecta el grafo (y no habiendo puentes, no hay un corte de aristas que desconecte el grafo y tenga menor cardinal). Pero el dual  $G^*$  de  $G$  no puede ser simple, lo que se advierte sin necesidad de construirlo, basta observar que tendrá dos vértices de grado 6 (¿correspondientes a qué caras?) unidos por dos aristas paralelas (¿por qué?, ¿a qué corresponden en  $G$ ?: identificarlas).

31. (-) La tabla muestra las distancias (km) de las rutas de tierra que conectan seis ciudades ( $B, L, M, P, R, S$ ). Determinar, mediante el algoritmo de Prim iniciado en  $R$ , todas las posibles formas de conectar las ciudades minimizando la cantidad de kilómetros a asfaltar, y para cada una de esas formas obtenidas, determinar las ciudades que quedan en el centro y las que quedan en la periferia del sistema asfaltado, y determinar el diámetro del árbol resultante

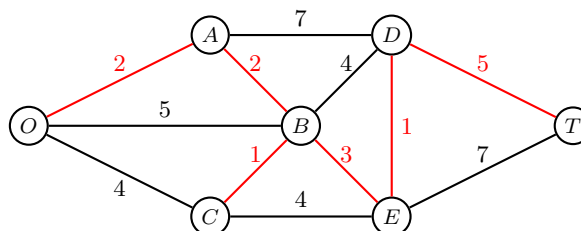
	$B$	$L$	$M$	$P$	$R$	$S$
$B$	-	7	11	7	10	15
$L$	7	-	18	3	12	11
$M$	11	18	-	18	20	27
$P$	7	3	18	-	9	8
$R$	10	12	20	9	-	13
$S$	15	11	27	8	13	-



♣ (Resp. Parcial). Son dos los árboles posibles, indicados con  $T_1$  y  $T_2$  en la figura, de peso  $11+7+7+9+8 = 38$ ; iniciando el algoritmo de Prim en  $R$ , debe conectarse necesariamente con  $P$  (pues la arista  $RP$  tiene el peso mínimo entre todas las que inciden en  $R$ ), ahora debe añadirse necesariamente  $PL$  y a continuación puede elegirse añadir la arista  $LB$  o la arista  $PB$ , ambas de peso 7, el menor peso de entre las aristas todavía disponibles que agrandan el árbol hasta allí presente; si se elige la arista  $LB$  el resto de la construcción es única y resulta en  $T_1$ ; en otro caso, eligiendo  $PB$ , las restantes elecciones son también únicas y arrojan el árbol  $T_2$ . Para el primer árbol,  $L$  es central (con excentricidad 18),  $M$  y  $R$  periféricos (ambos con excentricidad 30); en cambio, para el segundo árbol,  $B$  es central (excentricidad 16),  $M$  y  $R$  periféricos (excentricidad 27). El diámetro del primer árbol es  $\phi(T_1) = 30$ , mientras que para el segundo árbol es  $\phi(T_2) = 27$ .

32. (–) La tabla muestra las longitudes (km) de los senderos entre diversas estaciones de un parque preservado; el nodo  $O$  constituye el acceso al parque. Representar el grafo ponderado correspondiente e indicar cómo minimizar las perturbaciones para conectar las siete estaciones con un cableado de longitud mínima. Determinar además una ruta más corta entre la entrada  $O$  y el puesto  $T$  detallando el algoritmo utilizado. ¿Es única?

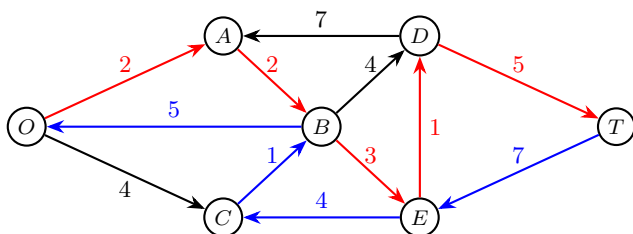
	$O$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$T$
$O$	×	2	5	4	×	×	×
$A$	2	×	2	×	7	×	×
$B$	5	2	×	1	4	3	×
$C$	4	×	1	×	×	4	×
$D$	×	7	4	×	×	1	5
$E$	×	×	3	4	1	×	7
$T$	×	×	×	×	5	7	×



♣ (Resp. Parcial). El grafo ponderado con las distancias se muestra en la figura; las aristas rojas construyen un árbol que minimiza la longitud a cablear (14 km); una ruta de longitud mínima (13 km) es  $OABEDT$  y otra es  $OABDT$ .

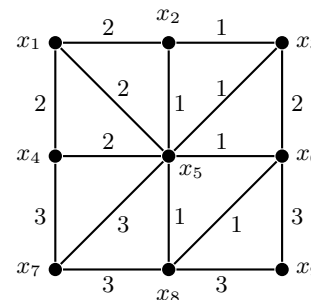
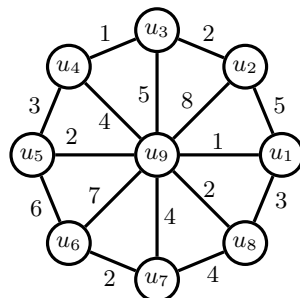
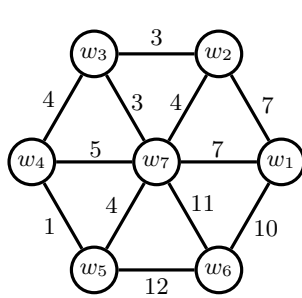
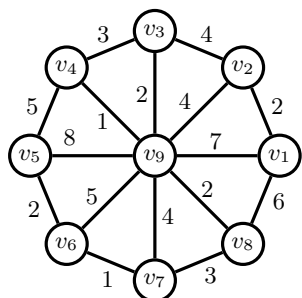
33. (–) Introducir, siempre que sea posible, en el parque del ejercicio anterior una orientación a cada uno de los caminos con la condición de que el grafo orientado resultante sea fuertemente conexo (esto es que desde cualquier punto se pueda ir a cualquier otro punto), escribir la tabla de adyacencias, representar gráficamente la red y determinar una ruta de longitud mínima entre  $O$  y  $T$  y una de longitud mínima entre  $T$  y  $O$ .

♣ (Resp. Parcial). Una orientación (no única) posible es la representada en la figura, con la ruta roja de longitud mínima (13 km) entre  $O$  y  $T$ , la ruta azul de longitud mínima (17 km) entre  $T$  y  $O$  (observar que la introducción de una orientación en general rompe la simetría del ir y volver). Observar de paso que si existe un camino cerrado que pase por todos los nodos (como lo es la yuxtaposición del rojo con el azul, que no es un circuito ni un ciclo), entonces necesariamente puede irse de cualquier nodo a cualquier otro, dando la conexidad fuerte, tal como lo exige el enunciado.



	$O$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$T$
$O$	×	2	×	4	×	×	×
$A$	×	×	2	×	×	×	×
$B$	5	×	×	×	4	3	×
$C$	×	×	1	×	×	×	×
$D$	×	7	×	×	×	×	5
$E$	×	×	×	4	1	×	×
$T$	×	×	×	×	×	7	×

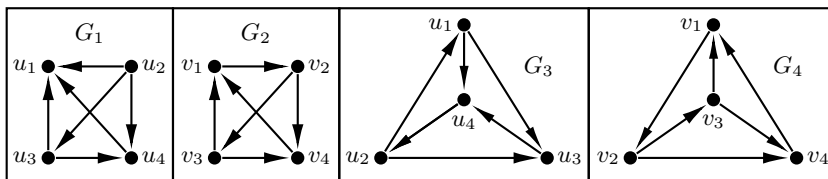
34. (–) La figura presenta grafos ponderados  $G = (V(G), E(G))$ , con el número junto a cada arista de  $E$  indicando su correspondiente peso. Aplicar a cada grafo el algoritmo de *Prim* para obtener un árbol generador mínimo  $T$ , detallando cada paso de la secuencia que permite construirlo. Rehacer, ahora con el algoritmo de *Kruskal*.



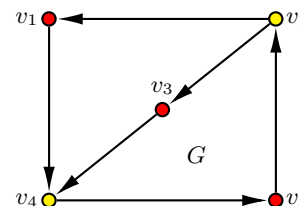
♣ (Resp. Parcial). Basta aplicar el algoritmo correspondiente. Para el último grafo, cualquier árbol generador minimal tiene peso 14.

35. (–) Para cada grafo orientado (*digraphs*) dar su matriz de adyacencia  $A$  e incidencia  $M$ , determinar la sucesión gráfica entrante  $d^+$  y saliente  $d^-$ , verificando que la suma de los grados entrantes es igual a la suma de los salientes e igual a la cantidad de aristas (*handshaking di-lemma*) y determinar cuáles son iguales, cuáles son isomorfos (definiendo el isomorfismo) y cuáles no. ¿Alguno es fuertemente conexo? ¿euleriano? ¿hamiltoniano?

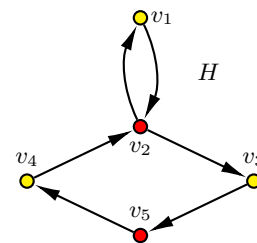
♣ (Resp. Parcial).  $G_2 = G_4$ ,  $G_3 \cong G_4$ ,  $G_1$  no es isomorfo a ningún otro;  $d^+(G_2) = (1, 1, 2, 2)$ ,  $d^+(G_1) = (0, 1, 2, 3)$ , solo  $G_1$  no es fuertemente conexo, ninguno euleriano,  $G_2$  (i. e.  $G_3$  y  $G_4$ ) es hamiltoniano, como lo prueba el ciclo  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ .



36. (-) Sea el grafo orientado fuertemente conexo  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n(G) = |V(G)|$  y tamaño  $m(G) = |E(G)|$  de número cromático  $\kappa(G) = 2$  representado en la figura. Proponer, siempre que exista, un grafo orientado  $H$  euleriano y fuertemente conexo que, no siendo isomorfo a  $G$ , tenga el mismo orden, tamaño, radio, diámetro, número cromático, centro y periferia que el grafo  $G$ . Verificar que el grafo orientado propuesto cumple todas estas características o probar que no existe ninguno que lo haga.

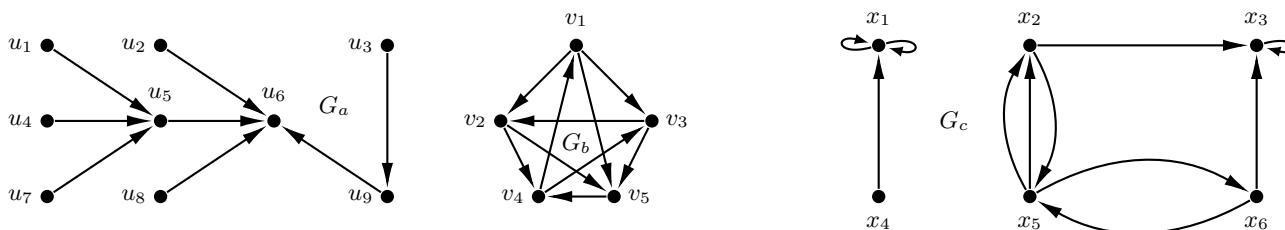


♣ (Resp. Parcial). El *digraph*  $H$  representado en la figura es del mismo orden ( $n(H) = 5$ ) que el dado y no es isomorfo a  $G$ , pues el grafo subyacente  $G_s$  no es simple (tiene una arista doble conectando  $v_1$  con  $v_2$ ), como sí lo es el de  $G$ . Los vértices centrales del grafo propuesto son  $v_2, v_4, v_5$  (¿cuál es su excentricidad?) y los periféricos  $v_1, v_3$  (¿excentricidad?), que coinciden con los de  $G$  (probarlo), ambos de tamaño  $m(H) = m(G) = 6$ , radio  $r(G) = r(H) = 3$  y diámetro  $\phi(G) = \phi(H) = 4$ . Por otra parte, es euleriano, como lo prueba el *circuito* (camino cerrado sin aristas repetidas)  $v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_2 v_1$  que incluye todas sus aristas; es fuertemente conexo, pues el circuito anterior (¡que no es un *ciclo*!) incluye todos sus vértices, de modo que siempre existe un camino (orientado, desde luego) entre  $v_i$  y  $v_j$ , cualesquiera sean  $i, j$  entre 1 y 5. Finalmente,  $H$  no es hamiltoniano ya que  $v_2$  es una *articulación*.



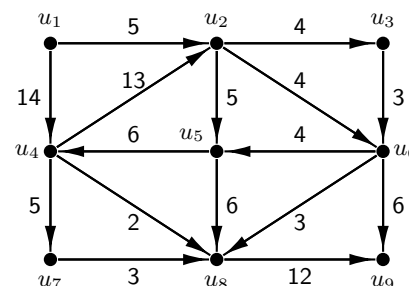
37. (+) Siempre que existan, graficar y dar la matriz de adyacencia (e incidencia) de grafos orientados cuyas sucesiones de grados sean: (a)  $d^+(G_a) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 4)$ ,  $d^-(G_a) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ; (b)  $d^+(G_b) = (1, 2, 2, 2, 3) = d^-(G_b)$ ; (c)  $d^+(G_c) = (0, 1, 2, 2, 3, 3)$ ,  $d^-(G_c) = (1, 1, 2, 2, 2, 3)$ ; (d)  $d^+(G_d) = (0, 0, 1, 1, 2, 6)$ ,  $d^-(G_d) = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$ . Determinar si son fuertemente conexos. ¿Qué relación hay entre la matriz de adyacencia de un grafo orientado y sus sucesiones gráficas?

♣ (Resp. Parcial). El elemento  $k$ -ésimo de  $d^+(G)$  es la suma de los elementos de la  $k$ -ésima columna de la matriz de adyacencia de  $G$  (la misma correspondencia entre  $d^-(G)$  y filas). En la figura se muestran los grafos  $G_a, G_b, G_c$  que satisfacen las sucesiones dadas.



38. Sea  $G = (V(G), E(G))$  la red de la figura con las capacidades indicadas por los números junto a cada arista.

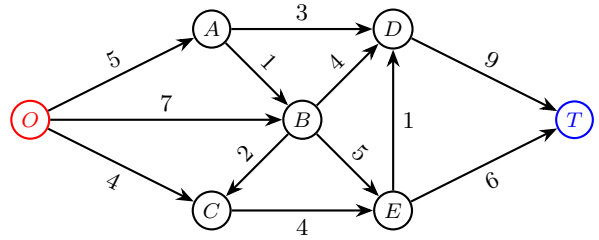
- (a) Aplicar, detallando todos los pasos, el algoritmo de Ford-Fulkerson que permite obtener un flujo máximo de  $G$ . ¿En cuánto podría reducirse la capacidad de la arista  $u_5 u_4$  sin alterar el flujo máximo?
- (b) En  $G$  el *alcance*  $a(u_i)$  de un vértice  $u_i$  es el conjunto de vértices  $u_j$  tales que hay un camino (orientado) desde  $u_i$  a  $u_j$ . En  $V$  se define  $u_i \mathcal{R} u_j$  sii  $a(u_i) \subseteq a(u_j)$ . Determinar si  $\mathcal{R}$  es una relación de orden en  $V(G)$ .
- (c) En  $V(G)$  se define la relación  $u_i \mathcal{R} u_j$  sii  $i = j$  o ( $i \neq j$ ) si existe un camino orientado de  $u_i$  a  $u_j$ . Determinar si  $\mathcal{R}$  es una relación de orden en  $V(G)$ .



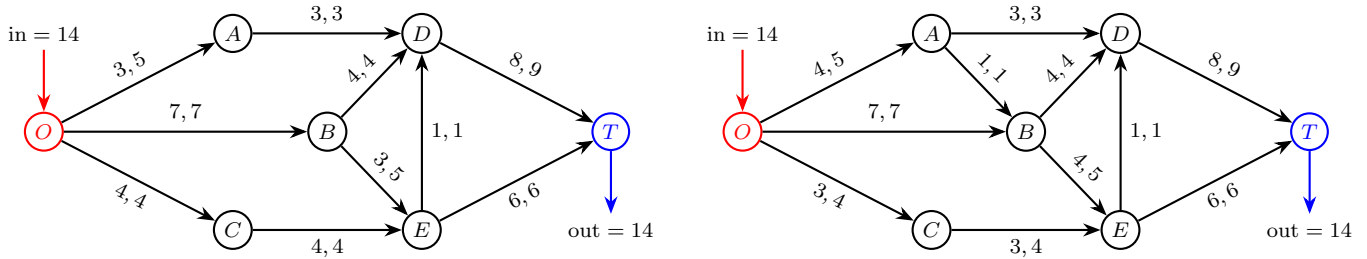
♣ (Resp. Parcial). Basta aplicar el algoritmo; la arista puede reducir su capacidad a 0. La relación definida en (b) no es de orden: puesto que el alcance de  $u_2$  es (verificarlo) el conjunto  $V(G) - u_1$ , y el alcance de  $u_4$  es también ese conjunto (basta ver que desde  $u_4$  se accede a  $u_2$ , de modo que  $u_2 \mathcal{R} u_4$  a la vez que  $u_4 \mathcal{R} u_2$  y como  $u_2 \neq u_4$ , resulta que  $\mathcal{R}$  no es antisimétrica.



39. ( $\rightsquigarrow$ ) Determinar, para la red de tuberías de la figura (los números indican la máxima capacidad de la arista correspondiente) el máximo flujo que puede transportarse desde la estación de bombeo  $O$  hasta la estación de destino  $T$  y cómo distribuir los caudales parciales. Si hubiese más de un modo de alcanzarlo, dar al menos dos. ¿En cuánto podría disminuirse la capacidad de la arista  $DT$  sin afectar el flujo máximo? ¿El aumento de la capacidad de la arista  $ET$  permite aumentar el flujo máximo?



♣ (Resp. Parcial). Se representan dos distribuciones diferentes que conducen al mismo flujo máximo, indicando junto a cada arista un par de números: el primero indica el flujo parcial, el segundo la capacidad máxima (se suprimen las conexiones cuyo flujo asignado es nulo).



La planilla de cálculo, por su parte muestra los flujos asignados en las celdas amarillas, cuando la función objetivo ubicada en la celda roja está maximizada. Lo que se maximiza es la función objetivo flujo neto entrante  $=C4+D4+E4$ , sujeto a las restricciones funcionales  $C4:N4 \leq C5:N5$  (los flujos asignados deben ser menores que la capacidad) y  $R34:V4=R5:V5$  (los centros de distribución no acumulan ni añaden circulante). En la parte inferior de la planilla se reproduce una ampliación de las fórmulas alojadas en cada uno de los casilleros que dan el flujo neto de los nodos (esto es cada una de las siete las celdas Q3, R3, S3, T3, U3, V3, W3).

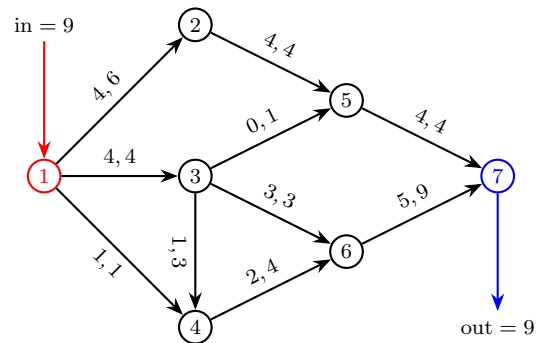
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1																							
2		Desde	O	O	O	A	A	B	B	B	C	D	E	E		Nodo	O	A	B	C	D	E	T
3		Hacia	A	B	C	B	D	C	D	E	E	T	D	T		Flujo neto	14	0	0	0	0	0	-14
4		Conexión	3	7	4	0	3	0	4	3	4	8	1	6		Restricción	=	=	=	=	=	=	
5		Capacidad	5	7	4	1	3	2	4	5	4	9	1	6	14	Recursos		0	0	0	0	0	$\phi$
	Flujo neto		$=C4+D4+E4$		$=-C4+F4+G4$		$=-D4-F4+H4+I4+J4$		$=-E4-H4+K4$		$=-G4-I4-M4+L4$		$=-J4-K4+M4+N4$		$=-L4-N4$								

40. (a) ( $\rightsquigarrow$ ) La tabla muestra las capacidades de una red de transporte que tiene al nodo 1 como fuente y al nodo 7 como destino. Asignar un flujo a cada una de las rutas de manera que la cantidad transportada sea máxima.  
 (b) ( $\rightsquigarrow$ ) Por cuestiones técnicas la ruta entre los nodos 3 y 6 podría eventualmente quedar fuera de servicio por un período equivalente al de la unidad de tiempo de los flujos. En ese caso ¿disminuiría el flujo máximo? Si la respuesta es afirmativa, determinar la nueva distribución máxima.

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	6	4	1	×	×	×
2	×	×	×	×	4	×	×
3	×	×	×	3	1	3	×
4	×	×	×	×	×	4	×
5	×	×	×	×	×	×	4
6	×	×	×	×	×	×	9
7	×	×	×	×	×	×	×

♣ (Resp. Parcial). (a) El grafo orientado de la figura muestra un flujo máximo a través de la red definida por la matriz de capacidades (el primer número sobre cada arista indica el flujo asignado, el segundo la capacidad). (b) Si se interrumpe la ruta 3-6, el máximo flujo se reduce en una unidad y se logra asignando los flujos según la siguiente tabla.

arco	12	13	14	25	34	35	36	46	57	67
flujo	4	3	1	4	3	0	0	4	4	4





▲	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2	Desde	1	1	1	2	3	3	3	4	5	6		Nodo	1	2	3	4	5	6	7	
3	Hacia	2	3	4	5	4	5	6	6	7	7		Flujo neto	9	0	0	0	0	0	0	-9
4	Conexión	4	4	1	4	1	0	3	2	4	5		Restricción	=	=	=	=	=	=	=	=
5	Capacidad	6	4	1	4	3	1	3	4	4	9	9	Flujo Rest.		0	0	0	0	0	0	φ.

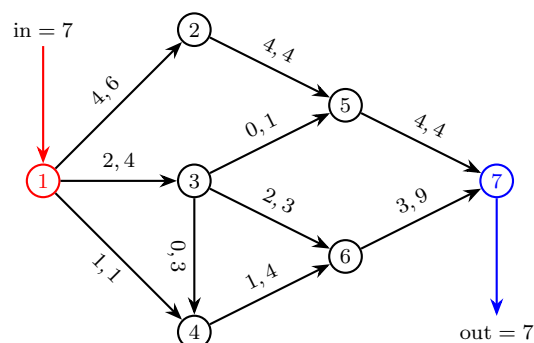
41. (a) (↔) La tabla muestra los costos unitarios (en miles de pesos) de la red de transporte cuyas capacidades son las establecidas en el ejercicio 25. Se quiere asignar la distribución de un flujo de valor 7 entre el nodo 1 y el nodo 7 de manera que el costo resulte mínimo.
- (b) (↔) Se presume que dificultades técnicas próximamente llevarán a que el costo unitario del transporte del tramo 3 – 6 se duplique, permaneciendo fijos los restantes. ¿Será necesario en tal caso reprogramar los volúmenes de transporte si se quiere obtener todavía el mínimo costo posible? ¿Qué porcentaje de incremento tendrá el total?

Costos unitarios de la red en miles \$/u

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	10	20	15	×	×	×
2	×	×	×	×	25	×	×
3	×	×	×	30	35	40	×
4	×	×	×	×	×	45	×
5	×	×	×	×	×	×	50
6	×	×	×	×	×	×	55
7	×	×	×	×	×	×	×

♣ (Resp. Parcial). (a) El grafo orientado de la figura muestra un flujo de valor 7 a través de la red (el primer número sobre cada arista indica el flujo asignado, el segundo la capacidad), que minimiza el costo en un valor de \$685000. (b) El costo se incrementa en un poco más del 11% (pasa a \$755000) y se logra asignando los flujos según la siguiente tabla.

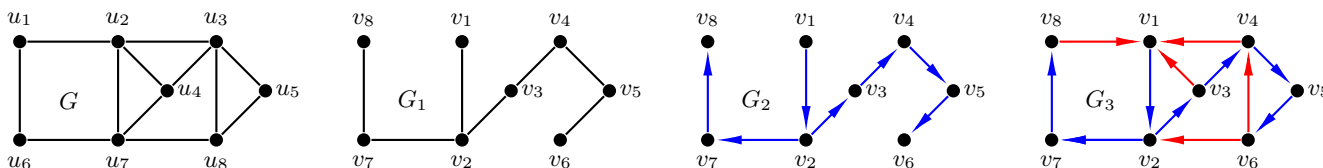
arco	12	13	14	25	34	35	36	46	57	67
flujo	4	2	1	4	2	0	0	3	4	3



La planilla organiza la minimización del valor en la celda roja (=SUMPRODUCT(C4:L4;C6:L6)) variando el rango de celdas amarillo (C4:L4) con las restricciones de capacidad (C4:L4 <= C5:L5) y de flujo (O3:U3 = O5:U5) además de no negatividad.

▲	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2	Desde	1	1	1	2	3	3	3	4	5	6		Nodo	1	2	3	4	5	6	7	
3	Hacia	2	3	4	5	4	5	6	6	7	7		Flujo neto	7	0	0	0	0	0	0	-7
4	Conexión	4	2	1	4	0	0	2	1	4	3		Restricción	=	=	=	=	=	=	=	=
5	Capacidad	6	4	1	4	3	1	3	4	4	9		Flujo Rest.	7	0	0	0	0	0	0	-7
6	Costo Unit.	10	20	15	25	30	35	40	45	50	55			685							φ.

42. En todo grafo conexo sin puentes puede introducirse una orientación tal que resulte fuertemente conexo: basta numerar sus vértices con subíndices crecientes en el proceso de construcción de búsqueda en profundidad (DFS: *depth first search*) de un árbol generador, orientando las aristas del árbol como  $(v_i, v_j), i < j$ , mientras que las restantes como  $(v_j, v_i), i < j$ . Introducir una orientación fuerte en el siguiente grafo y calcular radio, diámetro, centro y periferia del grafo original y del grafo orientado (*digraph*) resultante. ¿Es hamiltoniano? ¿transitivo?

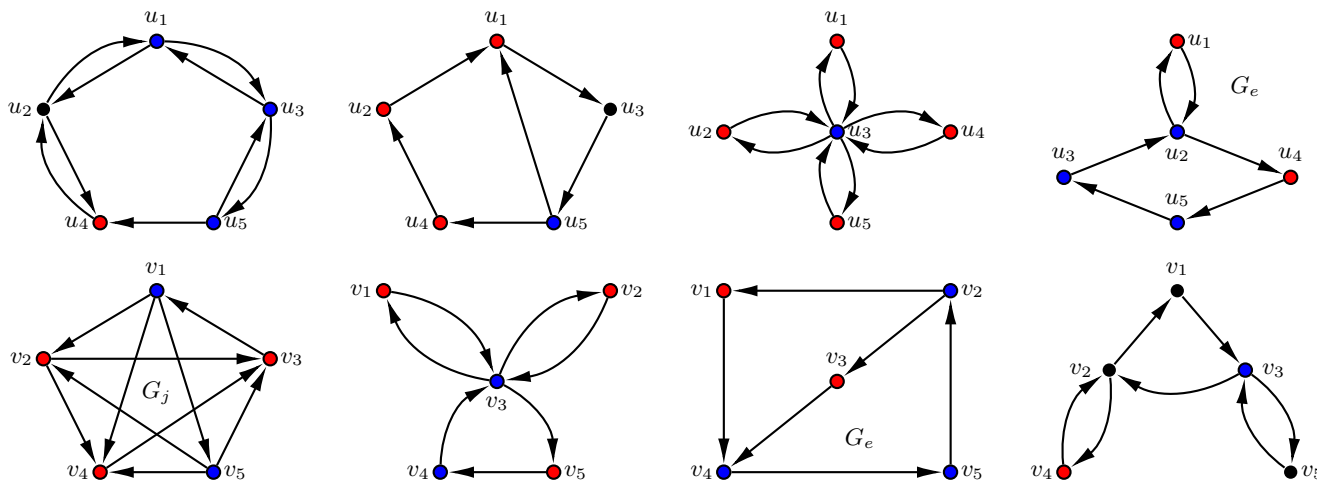


♣ (Resp. Parcial).  $G$  es conexo sin puentes;  $G_1$  es un DFS árbol generador (*DFS spanning tree*) de  $G$  iniciado en el vértice  $u_2$  (y entonces etiquetado  $v_1$ ) siguiendo en profundidad por  $u_7 u_4 u_3 u_5 u_8$  (etiquetados  $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$ ), regresando a  $u_7$  (único vértice previo donde el aumento de profundidad no genera ciclos) y desde allí  $u_6 u_1$ .  $G_2$  orienta el árbol  $G_1$  con vértices de índices crecientes (aristas utilizadas, azules) y  $G_3$  completa la orientación con índices decrecientes (aristas no utilizadas, rojas); el diámetro de  $G_3$  es 7, el vértice  $v_7$  está en su periferia, el radio es 4 y  $v_5$  pertenece a su centro.  $G_3$  no es hamiltoniano ni transitivo (probarlo!).

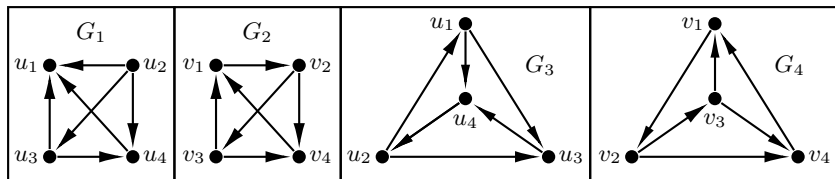
43. (+) Proponer en cada caso, siempre que exista, un grafo orientado (*digraph*)  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $5 = |V(G)|$  que sea fuertemente conexo (hay un *path* orientado desde cualquier vértice a cualquier otro) cuyo tamaño  $m = |E(G)|$ , radio  $r(G)$  y

diámetro  $\phi(G)$  sean los indicados, determinando para cada uno de ellos el centro  $C(G)$  y la periferia  $P(G)$ , y si son eulerianos o hamiltonianos. ¿Las condiciones exigidas los caracterizan, en cada caso, por completo? Dar sus sucesiones de grados salientes ( $d^+$ ) y entrantes ( $d^-$ ). (a)  $m = 5, r(G) = 4, \phi(G) = 4, |C(G)| = 5, |P(G)| = 5$ ; (b)  $m = 9, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 3, |P(G)| = 1$ ; (c)  $m = 6, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 1, |P(G)| = 3$  (d)  $m = 8, r(G) = 1, \phi(G) = 2, |C(G)| = 1, |P(G)| = 4$ ; (e)  $m = 6, r(G) = 3, \phi(G) = 4, |C(G)| = 3, |P(G)| = 2$ ; (f)  $m = 7, r(G) = 2, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 3$ ; (g)  $m = 7, r(G) = 2, \phi(G) = 4, |C(G)| = 1, |P(G)| = 1$ ; (h)  $m = 20, r(G) = 1, \phi(G) = 1, |C(G)| = 5, |P(G)| = 5$ . (i)  $m = 14, r(G) = 1, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 2$ ; (j)  $m = 10, r(G) = 2, \phi(G) = 3, |C(G)| = 2, |P(G)| = 3$ .

♣ (Resp. Parcial). Existe un grafo para cada uno de los casos (¡excepto uno!), algunos de los cuales se indican en las figuras siguientes (identificarlos). Los vértices azules son centrales; los rojos, periféricos. La caracterización no es completa: por ejemplo, se representan dos grafos no isomorfos (¿cuáles?) del caso (e). El grafo  $G_j$  es hamiltoniano ( $v_2 v_4 v_3 v_1 v_5 v_2$ ), no es euleriano ni semieuleriano y  $d^+(G_j) = (1, 1, 2, 3, 3), d^-(G_j) = (1, 1, 2, 3, 3)$ .



44. (-) Para cada uno de los cuatro torneos  $G = (V(G), E(G))$  ( tournaments: grafo orientado con grafo subyacente completo) determinar su radio y diámetro, centro y periferia, las sucesiones gráficas entrantes  $d^+$  y salientes  $d^-$  verificando que la suma de los grados entrantes es igual a la suma de los salientes e igual a la cantidad de aristas ( *handshaking di-lemma*) y determinar cuáles son iguales, cuáles son isomorfos y cuáles no. ¿Alguno es fuertemente conexo? ¿euleriano? ¿hamiltoniano? ¿transitivo?



♣ (Resp. Parcial).  $G_2 = G_4, G_3 \cong G_4, G_1$  no es isomorfo a ningún otro;  $d^+(G_2) = (1, 1, 2, 2), d^+(G_1) = (0, 1, 2, 3)$ , solo  $G_1$  no es fuertemente conexo, ninguno es euleriano,  $G_2$  es hamiltoniano ( $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ ).

45. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, detallando la prueba en caso de ser verdadera o un contraejemplo en caso de ser falsa.

- (a) (-) Todo grafo simple  $G$  de orden  $n = |V(G)| \geq 2$  tiene al menos dos vértices de igual grado; existen grafos con lazos o aristas múltiples sin vértices del mismo grado.
- (b) (+) Sean  $n$  (con  $n > 1$ ) números naturales  $d_1, d_2, \dots, d_n$  tales que  $0 \leq d_1 \dots \leq d_n$ . Para que estos números sean los grados de los vértices de algún grafo sin lazos  $G$  de orden  $n$  es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes: (i)  $d_1 + d_2 + \dots + d_n$  es par, (ii)  $d_n \leq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$ .
- (c) (-) Si  $A$  es la matriz de adyacencia de un grafo conexo  $G$  de orden  $n(G) = |V(G)| \geq 2$ , entonces todos los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz  $B = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$  son nulos. ¿La recíproca? ¿Vale lo mismo si el grafo es orientado fuertemente conexo?
- (d) En un grafo  $G$  cualquier camino (walk) entre  $v_0$  y  $v_n$  contiene un camino simple (path) entre esos vértices; además si  $\delta(G) \geq k$ , entonces  $G$  tiene un camino simple (path) de longitud  $k$ .
- (e) Todo grafo simple  $G$  de orden  $n = |V(G)|$  cuyo grado mínimo cumple  $\delta(G) \geq (n - 1)/2$  es  $G$  es conexo.
- (f) Si  $G$  es un grafo de orden  $6 = |V(G)|$ , entonces o bien  $G$  o bien su complemento  $G'$  contienen un triángulo.
- (g) (-) Si el diámetro del grafo simple  $G$  es  $\phi(G) \geq 3$ , entonces el diámetro de su complemento es  $\phi(G') \leq 3$ ; si en cambio es  $\phi(G) \geq 4$ , se tiene que  $\phi(G') \leq 2$ .
- (h) (-) Existe  $n > 2$  tal que el grafo  $G$  de orden  $n = |V(G)|$  y tamaño  $m = |E(G)|$  con  $m = n - 2$  es conexo.
- (i) (-) Todo camino simple (path) es bipartito y un ciclo (cycle) es bipartito sii su longitud es par.

- (j) En un grafo simple  $G = (V(G), E(G))$  de orden  $n = |V(G)|$  y tamaño  $m = |E(G)|$ , debe ser  $m \leq \binom{n}{2}$ , con la igualdad sii el grafo es  $K_n$ ; si  $G$  es un bipartito  $G(X, Y)$ , debe ser  $m \leq |X||Y| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ .
- (k) Los grafos simples  $G, H$  con matrices de adyacencia  $A_G, A_H$  son isomorfos sii existe una matriz de permutación  $P$  tal que  $A_H = PA_G P^T$ .
- (l) Un grafo  $G$  y su complemento  $G'$  no pueden ser ambos eulerianos (ni ambos hamiltonianos).
- (m) Si el grado mínimo  $\delta$  de un grafo de orden  $n$  no satisface la condición  $\delta \geq n/2$ , entonces no es hamiltoniano.
- (n) Todo grafo simple  $G$  de orden  $n = |V(G)|$  cuyo grado mínimo  $\delta$  satisface  $\delta \geq (n - 1)/2$  es hamiltoniano.
- (o) (+) Un grafo  $G = (V(G), E(G))$  es bipartito sii carece de ciclos de longitud impar.
- (p) Un grafo  $F = (V(F), E(F))$  es un bosque (*forest*: grafo que carece de ciclos) sii para todo par  $x, y$  de vértices distintos de  $V(F)$  hay a lo sumo un *path* entre  $x$  e  $y$ .
- (q) El algoritmo de Kruskal (o el de Prim) aplicado a un grafo en el que ninguna de sus ramas tienen el mismo peso, produce un árbol generador mínimo *único*.
- (r) (+) Todo árbol  $T = (V(T), E(T))$  de orden  $n = |V(T)| \geq 2$  tiene al menos dos hojas (*leaves* vértices de grado 1); además, borrar una hoja de  $T$  produce un árbol de orden  $n - 1$ . Además, el cardinal de su centro  $C(T)$  es 1 o es 2
- (s) Un grafo es un árbol sii carece de lazos y tiene un único árbol generador.
- (t) (-) Si  $x$  e  $y$  son dos vértices adyacentes del grafo conexo  $G = (V(G), E(G))$ , entonces cualquiera sea  $z \in V(G)$  se tiene  $|d(z, x) - d(z, y)| \leq 1$ .
- (u) (-) Todo árbol  $T = (V(T), E(T))$  de orden  $n = |V(T)| \geq 2$  es bipartito, y la parte de mayor tamaño tiene una hoja (ambas partes, si son de igual tamaño).
- (v) Un grafo de orden  $n \geq 2$  es bipartito sii todos sus ciclos son de longitud par; además la suma de sus grados no excede de  $n^2$ .
- (w) (-) Si un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces hay un camino entre esos dos vértices.
- (x) Un grafo simple con  $n = |V(G)|$  vértices y  $k$  componentes tiene un tamaño  $m = |E(G)|$  que cumple  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$ .
- (y) En un grafo orientado  $G = (V(G), E(G))$  con  $n = |V(G)|$  se verifica que  $\sum_{k=1}^n d_k^+ = \sum_{k=1}^n d_k^-$ ; si además el grafo subyacente es  $K_n$ , se cumple  $\sum_{k=1}^n (d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^n (d_k^-)^2$ .
- (z) Un grafo  $G = (V(G), E(G))$  es bipartito sii sus componentes conexas son bipartitas.

♣ (Resp. Parcial).

(a) La proposición es verdadera (el grado de un vértice pertenece al conjunto  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  y si fueran todos distintos habría una de grado  $n - 1$  que conecta con todos y uno aislado de grado 0, lo que es imposible. El grafo con un lazo de  $d = (1, 3)$  y el grafo con una arista múltiple de  $d = (1, 2, 3)$  prueban la segunda parte de la afirmación).

(b) Es verdadera. La necesidad es inmediata, si  $G = (V(G), E(G))$  es de orden  $n = |V(G)|$  y tamaño  $m = |E(G)|$  con sucesión de grados  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , la suma de sus grados es (*handshaking lemma*)  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2m$  que es par; por otra parte, toda arista que incide en el vértice  $v_n \in V(G)$  (y hay  $d_n = d(v_n)$  de ellas) también incide sobre alguno de los restantes (¡los lazos están prohibidos!), de modo que debe ser  $d_n \leq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$ . La suficiencia (inducción sobre  $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ ) es mucho más elaborada y técnica. Si  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2$  debe ser  $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-2} = 0$  y  $d_{n-1} = d_n = 1$ , lo que es satisfecho por el grafo de una arista y  $n - 2$  vértices aislados. Ahora, supuesta verdadera para toda sucesión que satisface (i), (ii) y  $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 2d$  ( $d \geq 2$ ), sea  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(d + 1) = 2d + 2$ , lo que exige considerar dos casos. El primero es que  $d_{n-2} < d_n$ , en cuyo caso  $d_n - 1$  es el máximo de la sucesión  $d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$  y (de (i) y (ii)) resulta que se cumplen (dar detalles)  $(360/7) : d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) = 0 \pmod{2}$ ,  $(\beta) : d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) \geq d_n - 1$ ; el segundo caso, si  $d_{n-2} = d_n$ , debe ser también  $d_{n-1} = d_n$ , cumpliéndose también (360/7), mientras que (ii) (teniendo en cuenta que  $d_{n-2} = \max(d_1, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1)$ ) equivale a  $d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \geq d_{n-2}$ , lo que también se cumple (¡completar detalles de esto que se afirma!). De ambos casos resulta que los números  $d_1, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$  (¡que suman  $2d!$ ) satisfacen (i) y (ii), de modo que, por hipótesis inductiva, existe un grafo con  $n$  vértices cuyos grados son esos números, y ahora basta con unir los vértices de grado  $d_{n-1} - 1$  con los de grado  $d_n - 1$  con una arista para obtener el grafo  $G$  de orden  $n$  cuyos grados son  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ . El principio de inducción completa hace el resto del trabajo.

(c) Es verdadera. Si el grafo es orientado y fuertemente conexo, para cualquier par de vértices  $u_i, u_j$  hay un  $u_i - u_j$  *path* y un  $u_j - u_i$  *path*, cuya longitud es lo sumo  $n - 1$  (¿por qué?), y como el coeficiente  $B(i, j)$  de la matriz  $B$  devuelve la cantidad de *paths* orientados entre el vértice  $u_i$  y el vértice  $u_j$ , debe ser necesariamente positivo. Recíprocamente, si  $B(i, j) > 0$  para todo  $i \neq j$ , para cualquier par de vértices  $u_i, u_j$  hay un  $u_i - u_j$  *path* y un  $u_j - u_i$  *path*, pero esto significa que  $G$  es fuertemente conexo (se presume conocido el hecho de que  $A^q(i, j)$  devuelve el número de  $u_i - u_j$  *paths* de longitud exactamente  $q$ , para cada  $q = 1, 2, \dots, n - 1$ , pero es un buen ejercicio incluir aquí mismo esa prueba). Por supuesto, si el grafo no es orientado, los razonamientos son los mismos. La recíproca es también verdadera tanto para el grafo sin orientar como para el orientado fuertemente conexo.

(d) La proposición es verdadera (la segunda parte: cualquier vértice  $v_1$  tiene  $k - 1$  adyacentes, sea  $v_2$  uno de ellos... por inducción también se prueba la primera parte).

(e) La proposición es verdadera (si  $G$  no es conexo, tiene al menos dos componentes conexas, si  $v$  es un vértice de una de ellas debe estar conectado con al menos  $\delta(G)$  vértices de esa componente, que entonces debe tener al menos  $(n - 1)/2 + 1 = (n + 1)/2$

vértices, de donde el número total de vértices  $n$  debe ser  $n \geq 2(n+1)/2 = n+1$ , lo que es una contradicción: luego no es posible que no sea conexo).

(f) La proposición es verdadera (cualquier vértice  $u \in V(G)$  tiene o bien en  $G$  o bien en  $G'$  al menos tres vértices adyacentes ¿por qué?  $v_1, v_2, v_3$ : si un par de ellos son adyacentes en  $G$ , forman con  $u$  un triángulo; si ningún par es adyacente, forman un triángulo en  $G'$ ).

(g) La proposición es verdadera (partir de que al ser  $\phi(G) > 2$  existen dos vértices  $v_1, v_2$  sin un vértice adyacente común a ambos, luego completar razonando sobre  $G'$ ; la segunda parte se deduce de la primera).

(h) La proposición es falsa (si  $G$  no tiene ciclos es un árbol y entonces debería ser  $m = n - 1 = n - 2$ , esto es  $1 = 2$ ; si  $G$  no es un árbol, tiene un árbol generador  $T$  con  $m_T < m = n - 2$  aristas, pero tal árbol de orden  $n$  debe tener  $m_T = n - 1$  aristas, de modo que debería ser  $n - 1 < n - 2$ , esto es  $2 < 1$ ).

(i) La proposición es verdadera.

(j) La proposición es verdadera (y la igualdad en la segunda afirmación sii el grafo es  $K_{n/2, n/2}$ ).

(k) La proposición es verdadera

(l) La proposición es falsa (considerar  $C_5$ ).

(m) La proposición es falsa (considerar  $C_n$  con  $n \geq 5$ ).

(n) La proposición es falsa (considerar  $K_{p,q}$  con  $p = (n-1)/2, q = (n+1)/2$  donde  $n$  es cualquier impar,  $n \geq 3$ ; también, examinar directamente  $P_3$ ).

(o) La proposición es verdadera (el sí: para un cualquier  $x \in V$ , sea  $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V : d(x,y) \text{ es impar}\}, V_2 \stackrel{\text{def}}{=} V - V_1$ , entonces si alguna arista uniera dos vértices de  $V_1$  habría (¿por qué?) un ciclo impar; argumentar ahora porqué una arista tampoco puede unir dos vértices de  $V_2$  y concluir que  $G$  es bipartito). Para la recíproca se necesita mucha más técnica.

(p) La proposición es verdadera (el sí: Si  $P = v_0 v_1 \dots v_q$  y  $P^* = v_0 u_1 u_2 \dots u_q$  son dos *paths* distintos en  $F$  y  $k+1$  el menor índice para el que  $v_{k+1} \neq u_{k+1}$  y  $j$  el menor índice tal que  $j \geq k+1$  y  $u_{j+1}$  es un vértice de  $P$ , esto es  $u_{j+1} = v_h$ , entonces  $v_k v_{k+1} \dots v_h u_j u_{j-1} \dots u_{k+1} v_k$  es un ciclo en  $F$ ; para el solo si: de la existencia de un ciclo  $v_0 v_1 \dots v_q v_0$  en  $F$  resulta que  $v_0 v_1 \dots v_q$  y  $v_0 v_q$  son dos *paths* en  $F$ ).

(q) La proposición es verdadera.

(r) La proposición es verdadera. Si  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  es la sucesión de grados del árbol  $T$ , al ser conexo,  $\delta(T) = d_1 \geq 1$  y como el tamaño es  $m = |G| = n - 1$  (¡es buen ejercicio *probar* esta propiedad de un árbol cualquiera!), si tuviera a lo sumo un vértice de grado 1 se tendría por el *handshaking lemma* que  $2m = 2n - 2 = \sum_{k=1}^n d_k \geq 1 + 2(n-1)$ , esto es  $2n - 2 \geq 2n - 1$ , lo que es imposible; además, si  $v$  es una hoja de  $T$  y  $T_1 = T - v$  y para cualquier par  $u, w \in V(T_1)$ , todo *path* entre  $u$  y  $w$  en  $T$  es un *path* entre  $u$  y  $w$  en  $T_1$ , pues la hoja  $v$  no puede ser parte de ese *path* (¡hacer un esquema!), de modo que  $T_1$  es conexo, y como la operación de borrar un vértice no genera ciclos,  $T_1$  es un conexo sin ciclos, esto es, un árbol de orden  $n - 1$ . Para la segunda parte, si  $T$  es de orden 1, es  $C(T) = V(T)$  (y por lo tanto el cardinal de su centro es 1); si  $T$  es un árbol de orden 2, también es  $C(T) = V(T)$  (y por lo tanto el cardinal de su centro es 2); si  $T$  es de orden 3, como tiene al menos dos hojas, tiene exactamente dos hojas (¿por qué?), de modo que su centro lo constituye el único vértice que no es una hoja (i.e.  $|C(T)| = 1$ ). Si el orden de  $T$  es 4 es o bien  $K_{1,3}$  cuyo centro tiene cardinal 1 o es  $P_4$  cuyo centro lo constituyen los dos vértices que no son hojas. Ahora en general, si el orden  $n$  de  $T$  es  $n \geq 5$ , sea  $T_h$  el árbol obtenido de  $T$  borrando todas sus hojas: la excentricidad de los vértices de  $T_h$  es la misma que la excentricidad de los mismos vértices en  $T$  disminuida en uno (¿por qué?), de modo que esta operación deja inalterado el centro de  $T$ . Ejecutando esta operación sucesivamente, se llega a un árbol de a lo sumo 4 vértices, con el mismo centro que el original, y todo árbol de a lo sumo cuatro vértices tiene un centro de cardinal 1 o 2.

(s) La proposición es verdadera (solo si: si  $G$  es un árbol,  $G$  es un árbol generador de  $G$ , y si hubiera otro, tendría una arista que no está en  $G$ , lo que es imposible; por otra parte, carece de ciclos y por lo tanto, de lazos).

(t) La proposición es verdadera (Un  $z, y$ -*path* puede ser extendido o recortado para alcanzar  $x$ , de modo que  $d(z, x) \leq d(z, y) + 1$ , y del mismo modo  $d(z, y) \leq d(z, x) + 1$ , que juntas prueban  $|d(z, x) - d(z, y)| \leq 1$ ).

(u) La proposición es verdadera (Si  $X$  e  $Y$  son las dos partes de  $T$ , con  $|X| \geq |Y|$ , y  $X$  no tuviera hojas, entonces se tendría que  $|E(T)| \geq 2|X| = |X| + |X| \geq |X| + |Y| = |V(T)|$ , lo que es imposible pues en un árbol es  $|E(T)| = |V(T)| - 1$ ).

(v) La proposición es verdadera (el solo si: con  $V_1, V_2$  las partes de  $G$ , un ciclo  $v_1 v_2 \dots v_q v_1$  debe tener los vértices de subíndice impar en una de las partes (p.e.  $V_1$ ) y los pares en la restante, de modo que  $q$  es par).

(w) La proposición es verdadera. Si no hubiera tal camino, estarían en diferentes componentes, y en cada una de ellas serían los únicos vértices de grado impar, lo que es imposible ¿por qué?.

(x) La proposición es verdadera.

(y) La proposición es verdadera (del *handshaking di-lemma* es  $m = |E(G)| = \sum_{k=1}^n d_k^+ = \sum_{k=1}^n d_k^-$  (con  $d_k$  se indica el grado del vértice  $v_k \in V(G)$ ); por otra parte si  $K_n$  es el grafo subyacente, para cada  $v_k \in V(G)$  es  $d_k^+ + d_k^- = n - 1$  de modo que  $0 = (n - 1) \cdot 0 = \sum_{k=1}^n (n - 1)(d_k^+ - d_k^-) = \sum_{k=1}^n (d_k^+ + d_k^-)(d_k^+ - d_k^-) = \sum_{k=1}^n ((d_k^+)^2 - (d_k^-)^2)$  de donde  $\sum_{k=1}^n (d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^n (d_k^-)^2$ ).

(z) La proposición es verdadera (si  $G$  es bipartito, debe serlo cualquier subgrafo, en particular sus componentes; recíprocamente, si las componentes (bipartitas) de  $G$  son  $G_k = ((X_k \cup Y_k), E_k)$ , definiendo  $X \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k X_k, Y \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k Y_k, E \stackrel{\text{def}}{=} \cup_k E_k$ , el grafo  $G$  es  $G = ((X \cup Y), E)$  es bipartito).